

## Devoir pour la rentrée – Préparation à la Terminale S

Le programme de Terminale S est chargé et le rythme de progression est rapide. Ce qui a été vu en première ne sera donc repris que rapidement afin de consacrer plus de temps aux nombreuses notions nouvelles. Par ailleurs, vous devez arriver en cours ayant déjà « dérouillé » les mécanismes de calcul. C'est pourquoi il est impératif d'être prêt le jour de la rentrée et d'avoir fait un minimum d'entraînement. Révisez bien les formules de trigonométrie et de dérivées.

Les exercices proposés concernent les notions fondamentales de première. Toutes ces notions seront dans le premier devoir de terminale, mi-septembre.

Bien entendu, il est indispensable de revoir en plus pendant l'été les notions qui ont été mal assimilées en première !

**Ces exercices sont à rendre le jour de la rentrée.** Ils seront notés en fonction de la rigueur avec laquelle vous aurez suivi la méthode demandée. Le premier DS de l'année portera sur ces exercices.

Mon conseil est de les faire les quinze jours précédents la retraite de rentrée (à partir du 21 août).

### Méthode de travail :

- 1) Avoir son cours de première avec soi et s'y replonger si besoin est.
- 2) **Relire rapidement les fiches ou résumés de cours** qui ont pu être faits tout au long de l'année.
- 3) **Chercher** les exercices et les rédiger sur feuille SANS utiliser le corrigé. **Préciser le temps imparti** à chaque exercice sur votre copie.
- 4) **Corriger avec soin** les exercices (les traces de correction devront apparaître OBLIGATOIREMENT sur la copie).
- 5) **Refaire** les exercices qui ont posé des difficultés. **Ce travail est également à rendre.**

J'espère pouvoir vous faire confiance. Un travail où vous vous contenteriez de recopier le corrigé ne serait qu'une parfaite perte de temps !

En cas de besoin, mon adresse email est la suivante : [ac.janicot@gmail.com](mailto:ac.janicot@gmail.com)

Bonnes vacances!

Mme Janicot

« Le travail opiniâtre surmonte tous les obstacles » (Virgile)



### Exercice 1 : Polynômes

1) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations et inéquations suivantes :

$$(1) x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$(3) x^2 + 2x + 2 = 0$$

$$(5) \frac{1}{4}x^2 - x + 1 > 0$$

$$(2) x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = 0$$

$$(4) -6x^2 + 12x + 90 \geq 0$$

$$(6) 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$$

2) Soit le polynôme  $f$  défini par  $f(x) = x^2 - 2x - 3$ . On note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- a) Déterminer la forme canonique de  $f(x)$ .
- b) Donner un encadrement de  $f(x)$  pour  $x$  appartenant à  $[-2; 0]$ .

3) Soit  $P(x) = x^3 - 15x - 4$ .

- a) Vérifier que 4 est une racine de  $P(x)$ .
- b) Déterminer les réels  $a, b$  et  $c$  tels que  $P(x) = (x - 4)(ax^2 + bx + c)$ .
- c) Résoudre l'inéquation  $P(x) \geq 0$ .

4) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :

$$(7) -x^2 + \sqrt{3} + 6/x^2 \leq 0 \quad (9) |2x - 1| \leq |x + 2|$$
$$(8) |-3x + 4| + |-5 + x| = 10 \quad (10) x + 1 \geq \sqrt{3 - x}$$

### Exercice 2 :

On considère l'hyperbole  $\mathcal{H}$  d'équation  $y = \frac{2}{x}$  et les droites  $\mathcal{D}_m$  d'équation  $y = m(x + 1) - 2$  où  $m$  est un réel.

- 1) Montrer que les droites  $\mathcal{D}_m$  passent par un point fixe  $C$ , indépendant de  $m$ , et que  $C \in \mathcal{H}$ .
- 2) Que représente  $m$  pour la droite  $\mathcal{D}_m$  ?
- 3) Etudier, suivant les valeurs de  $m$ , les points d'intersection de  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{D}_m$ .

### Exercice 3 : Etude de fonctions

Etudier les fonctions (c'est-à-dire : ensemble de définition, limites, dérivée et variations) et tracer de manière approximative l'allure de chaque courbe :

1.  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2$
2.  $f(x) = (2 - x)\sqrt{x}$ , déterminer également l'équation de la tangente à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 1.
3.  $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$
4.  $f(x) = \frac{x^2-3x}{x+1}$ . Questions supplémentaires :
  - a. Démontrer également que  $\Omega(-1; -5)$  est un centre de symétrie de  $\mathcal{C}$ .
  - b. Déterminer les réels  $a, b$  et  $c$  tels que pour tout  $x \in \mathcal{D}_f$ ,  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$ .
  - c. En déduire la position relative de  $\mathcal{C}$  par rapport à la droite  $\Delta$  d'équation  $y = ax + b$ .
5.  $f(x) = (1 + \cos x) \cdot \cos x$

### Exercice 4 :

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$  par  $f(x) = ax + b - \frac{c}{x+2}$  où  $a, b$  et  $c$  sont des constantes réelles.

On note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère.

1. Calculer  $f'(x)$ .
2. Déterminer  $a, b$  et  $c$  sachant que  $\mathcal{C}$  passe par le point  $A(1; 2)$  et que la tangente à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse  $-1$  a pour équation  $y = -x - 1$ .
3. Trouver les abscisses des points où la tangente à  $\mathcal{C}$  en ce point est parallèle à la droite  $\Delta$  d'équation :  $y = 3x + 3$

### Exercice 5 : Calcul de dérivées de fonctions composées

Calculer les dérivées des fonctions suivantes en utilisant la formule de dérivée des fonctions composées et en précisant bien leur domaine de dérivabilité.

1.  $f(x) = \sqrt{5x - 2}$
2.  $g(x) = (2x - 3)^5$

**Exercice 6 : Suites**

Les questions suivantes sont indépendantes :

1. La suite  $(u_n)$  est arithmétique de raison 8. On sait que  $u_{100} = 650$ . Que vaut  $u_0$  ?
2. Calculer la valeur exacte de  $S = 1+3+9+27+\dots+59049$  et  $S' = 1+4+7+\dots+1000$
3. Soit la suite  $(u_n)$  définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n}{1+n}$ .
  - a. La suite est-elle arithmétique ? géométrique ?
  - b. Etudier les variations de  $u$ .
4. Soit  $(u_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$ . Montrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 4$ .

**Exercice 7 : Suite arithmético-géométrique**

Soit  $(u_n)$  la suite définie par :  $u_0 = 300$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = 0,75u_n + 200$ .

1. Utiliser les droites d'équations  $y = x$  et  $y = 0,75x + 200$  pour construire les quatre premiers termes de la suite  $(u_n)$ . Que peut-on conjecturer à propos de la limite de la suite  $(u_n)$  ?
2. Soit  $(v_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$ , par  $v_n = u_n - 800$ .
  - a. Démontrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
  - b. Exprimer, pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n$  en fonction de  $n$ . En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 800 - 500 \times 0,75^n$ .
  - c. La suite  $(u_n)$  est-elle convergente ?
3. Une salle de spectacle propose un abonnement pour l'année. En 2010, il y avait 300 abonnés. On estime que chaque année, il y a 200 nouveaux abonnés et que d'une année sur l'autre, 75 % des abonnés renouvellent leur abonnement.

On note  $u_n$  le nombre d'abonnés pour l'année 2010 +  $n$ . On a donc  $u_0 = 300$  et  $u_{n+1} = 0,75u_n + 200$ .

- a. Dans combien d'années, le nombre d'abonnés sera-t-il supérieur à 790 ? (utiliser un algorithme)
- b. Dans ces conditions, est-il possible pour le gérant de la salle de spectacle d'espérer 1000 abonnés ?

**Exercice 8 : Trigonométrie**

- 1) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :
  - a)  $\cos(t) = \cos\frac{3\pi}{4}$
  - b)  $\sin(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
  - c)  $\cos(t) = -\cos\frac{\pi}{5}$
  - d)  $\sin(2t) = \frac{1}{2}$
  - e)  $\sin(2x) = -\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$
- 2) Simplifier au maximum les expressions suivantes :
 
$$A(x) = \sin(\pi + x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(\pi - x)$$

$$B(x) = \cos(x + \pi) \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin^2(-x)$$

$$C(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$$

$$D(x) = (\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2$$
- 3) Démontrer que  $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$  pour tout réel  $x$ .

**Exercice 9 : Loi binomiale**

Une usine produit des sacs. On suppose que la probabilité (arrondie au centième) qu'un sac soit défectueux est de 0.03.

On prélève au hasard un échantillon de 100 sacs dans la production d'une journée. La production est suffisamment importante pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 sacs. On considère la variable aléatoire  $X$  qui, à tout prélèvement de 100 sacs, associe le nombre de sacs défectueux.

- 1) Justifier que  $X$  suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- 2) Quel est la probabilité de l'évènement « au moins un sac est défectueux » ? On arrondira le résultat au centième. Interpréter ce résultat.
- 3) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire  $X$ . Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.

**Exercice 10 : Géométrie analytique**

Soit  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthonormal du plan.

- 1° Construire la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = 2x + 1$ .
- 2° Déterminer un vecteur normal à  $\mathcal{D}$ .
- 3° Soit le point  $A(3; 2)$ . Déterminer une équation de la droite  $\Delta$  orthogonale à  $\mathcal{D}$ , contenant le point  $A$ .
- 4° Déterminer, par le calcul, les coordonnées du point d'intersection  $H$  des droites  $\mathcal{D}$  et  $\Delta$ .
- 5° Calculer la distance  $AH$  (cette distance est appelée « distance du point  $A$  à la droite  $\mathcal{D}$  »).
- 6° Établir une équation du cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $A$ , tangent à  $\mathcal{D}$ .

**Exercice 11 : Géométrie analytique**

On donne un quadrilatère convexe  $ABCD$ . On appelle  $E$  le point de rencontre des côtés opposés  $(AB)$  et  $(CD)$  et  $F$  le point de rencontre des côtés opposés  $(AD)$  et  $(BC)$ . Soit  $I, J, K$  les milieux respectifs de  $[AC], [BD], [EF]$ .

On prend pour repère  $(A, \vec{AB}, \vec{AF})$  et les coordonnées de  $D$  et  $E$  sont alors :

$$D\left(\begin{matrix} 0 \\ d \end{matrix}\right) \text{ et } E\left(\begin{matrix} e \\ 0 \end{matrix}\right).$$

1. Trouver des équations des droites  $(BF)$  et  $(DE)$ .
2. Calculer les coordonnées des points  $I, J, K$ .
3. Montrer que  $I, J, K$  sont alignés.



GILBERT DELAHAYE - MARCEL MAULETT

