Corrigé – Devoir pour la rentrée – Préparation à la Terminale S

A n'utiliser qu'après avoir VRAIMENT cherché et rédigé les exercices !

Exercice 1 :

1). E_1: $x^2 - 5x - 6 = 0$ -1 est une racine évidente, or $ax_1x_2 = -6$ d'où 6 est l'autre racine.
(autre méthode : utilisation du discriminant)

$$\boxed{\mathcal{S} = \{-1; 6\}}$$

E_2: $x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \sqrt{3}\right)^2 = 0$ (identité remarquable)
$\Leftrightarrow x = \sqrt{3}$ d'où $\boxed{\mathcal{S} = \{\sqrt{3}\}}$

E_3: $x^2 + 2x + 2 = 0$ Calculons le discriminant du polynôme $x^2 + 2x + 2$: $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \times 2 = -4 < 0$
Donc ce polynôme du 2nd degré n'admet pas de racines. $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$

I_4: $-6x^2 + 12x + 90 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 15 \leq 0$

Calculons le discriminant du polynôme $-6x^2 + 12x + 90$: $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-15) = 64 = (8)^2 > 0$

Donc ce polynôme du 2nd degré admet deux racines $\begin{cases} x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-8}{2} = -3 \\ x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+8}{2} = 5 \end{cases}$

Or un polynôme du 2nd degré est du signe du coefficient de x^2 à l'extérieur des racines donc $\boxed{\mathcal{S} = [-3; 5]}$

I_5: $\dfrac{1}{4}x^2 - x + 1 > 0$ $\Delta = (-1)^2 - 4 \times \dfrac{1}{4} \times 1 = 0$
donc le polynôme $\frac{1}{4}x^2 - x + 1$ admet une seule racine : $x_0 = -\frac{b}{2a} = 2$. D'où $\boxed{\mathcal{S} = \mathbb{R} \setminus \{2\}}$

I_6: $2cos^2x + 3\cos x - 2 = 0$ On pose $X = \cos x$ et on résout $2X^2 + 3X - 2 = 0$. $\Delta = 25$
Donc $\begin{cases} X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-5}{4} = -2 \\ X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$
Or $X = \cos x$. On résout donc $\cos x = -2$ ou $\cos x = \frac{1}{2}$
$\forall x \in \mathbb{R}, \cos x \in [-1; 1]$, donc $\cos x = -2$ est impossible.
$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ d'où $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi; -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}}$

2) a) $f(x) = x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x + 1 - 1 - 3$ donc $\boxed{f(x) = (x-1)^2 - 4}$

b) $-2 \leq x \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 4$ car la fonction carrée est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$

et $-2 \leq x \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq -2x \leq 4$

donc $-2 \leq x \leq 0 \Leftrightarrow 0 + 0 - 3 \leq x^2 - 2x - 3 \leq 4 + 4 - 3 \Leftrightarrow$ $\boxed{f(x) \in [-3; 5]}$

<u>Autre méthode possible</u> : om montre que f est décroissante sur $]-\infty; -1]$ et donc que :

$-2 \leq x \leq 0 \Leftrightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(-2)$.

3) a) $P(4) = 4^3 - 15 \times 4 - 4 = 64 - 60 - 4 = 0$ donc $\boxed{\text{4 est racine de } P(x).}$

b) $(x-4)(ax^2+bx+c) = ax^3 + x^2(-4a+b) + x(-4b+c) - 4c$

or $P(x) = x^3 - 15x - 4$ donc par identification, on en déduit que $a = 1, b = 4a = 4, \ c = 1$

donc $\boxed{P(x) = (x-4)(x^2+4x+1)}$

Cherchons les racines de x^2+4x+1 : . $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 = 12$ donc $\begin{cases} x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-\sqrt{12}}{2} = -2-\sqrt{3} \\ x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+\sqrt{12}}{2} = -2+\sqrt{3} \end{cases}$

D'où $P(x) = (x-4)(x+2+\sqrt{3})(x+2-\sqrt{3})$

<u>Tableau de signe</u> :

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{3}$		$-2+\sqrt{3}$		4		$+\infty$
$x-4$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2+\sqrt{3}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x+2-\sqrt{3}$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $\boxed{\mathcal{S} = [-2-\sqrt{3}; -2+\sqrt{3}] \cup [4; +\infty[}$

4) I_7 : $-x^2 + \sqrt{3} + \frac{6}{x^2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-x^4+\sqrt{3}x^2+6}{x^2} \leq 0$ <u>Valeur interdite</u> : $x = 0$

$\Leftrightarrow -x^4 + \sqrt{3}x^2 + 6 \leq 0$ car $x^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}^*$

On pose $X = x^2$ et on résout $-X^2 + \sqrt{3}X + 6 \leq 0$: $\Delta = 27 > 0$ donc $\begin{cases} X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\sqrt{3}-\sqrt{27}}{-2} = 2\sqrt{3} \\ X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\sqrt{3}+\sqrt{27}}{-2} = -\sqrt{3} \end{cases}$

Soit $-(X+\sqrt{3})(X-2\sqrt{3}) \leq 0$ Or $X = x^2$ donc on résout $-(x^2+\sqrt{3})(x^2-2\sqrt{3}) \leq 0$

Or $x^2 + \sqrt{3} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$ donc il suffit de résoudre $x^2 - 2\sqrt{3} \geq 0$

$x^2 - 2\sqrt{3} \geq 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{2\sqrt{3}})(x + \sqrt{2\sqrt{3}}) \geq 0$ or un polynôme du 2nd degré est du signe de a à l'extérieur des racines

donc $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty; -\sqrt{2\sqrt{3}}] \cup [\sqrt{2\sqrt{3}}; +\infty[}$

E_8 : $|-3x+4| + |-5+x| = 10$

On détermine les valeurs frontières de chaque valeur absolue : $-3x+4 = 0$ soit $x = 4/3$ et $-5+x = 0$ soit $x = 5$

On remplit un tableau de forme :

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		5		$+\infty$
$\|-3x+4\|$		$-3x+4$	0	$3x-4$	11	$3x-4$	
$\|-5+x\|$		$5-x$	$\frac{11}{3}$	$5-x$	0	$-5+x$	
(E_1)		$-4x+9=10$ $x = -\frac{1}{4}$ possible		$2x+1=10$ $x = \frac{9}{2}$ possible		$4x-9=10$ $x = \frac{19}{4}$ impossible	

D'où $\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{4}; \frac{9}{2}\right\}}$

I_9: $|2x-1| \leq |x+2|$

On détermine les valeurs frontières de chaque valeur absolue : $2x-1 = 0$ soit $x = \frac{1}{2}$ et $x+2 = 0$ soit $x = -2$

On remplit un tableau de forme :

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$\|2x-1\|$		$-2x+1$	5	$-2x+1$	0	$2x-1$	
$\|x+2\|$		$-x-2$	0	$x+2$	$\frac{5}{2}$	$x+2$	
(E_2)		$-2x+1 \leqslant -x-2$ $x \geqslant 3$ impossible $S_1 = \varnothing$		$-2x+1 \leqslant x+2$ $x \geqslant -\frac{1}{3}$ $S_2 = \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$		$2x-1 \leqslant x+2$ $x \leqslant 3$ $S_3 = \left[\frac{1}{2}; 3\right]$	

D'où $\boxed{\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3 = [-\frac{1}{3}; 3]}$

I_{10} : $x+1 \geq \sqrt{3-x}$ $\sqrt{3-x}$ est définie pour $x \leq 3$. De plus, pour que l'inéquation soit possible, il faut que $x+1 \geq 0$ donc $x \in [-1;3]$.

On élève chacun des membres de I_{10} au carré, on perd à ce moment-là l'équivalence.

Donc $I_{10} \Rightarrow (x+1)^2 \geq 3-x$, soit $x^2+3x-2 \geq 0$. Les racines du polynôme x^2+3x-2 sont $\begin{cases} x_1 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2} \\ x_2 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$

Or un polynôme du 2nd degré est du signe de a à l'extérieur des racines et $x \in [-1;3]$ donc $\boxed{\mathcal{S} = \left[\frac{-3+\sqrt{17}}{2};3\right]}$

Exercice 2 :

1) $\forall m \in \mathbb{R}, (-1;-2) \in \mathfrak{D}_m$. En effet, $m(-1+1)-2=-2$.

Donc le point C de coordonnées $(-1;-2)$ est le point fixe recherché. De plus, $C \in \mathcal{H}$, car $\frac{2}{-1}=-2$

2) m représente le coefficient directeur de $\mathfrak{D}_m$.

3) On résout $\frac{2}{x} = m(x+1)-2 \quad (E)$ <u>Valeur interdite</u> : $x=0$

$(E) \Leftrightarrow mx^2 + x(m-2) - 2 = 0$

<u>1er cas</u> : $m=0$ $(E) \Leftrightarrow -2x-2=0$ Soit $x=-1$ et $y=-2$

<u>2ème cas</u> : $m \neq 0$ On calcule le discriminant : $\Delta = (m-2)^2 + 8m = m^2+4m+4 = (m+2)^2$

$\Delta = 0$ pour $m=-2 \Longrightarrow -2x^2-4x-2=0 \Longrightarrow x=-1$ donc $\mathcal{H} \cap \mathfrak{D}_{-2} = \{C(-1;-2)\}$

$\Delta > 0 \quad \forall m \in \mathbb{R} \setminus \{0;-2\}$, l'équation (E) admet deux solutions, il y a donc deux points d'intersection.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(m-2)-|m+2|}{2m} \\ x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(m-2)+|m+2|}{2m} \end{cases}$$

Si > -2 , $\begin{cases} x_1 = -1 \quad \text{donc } y_1 = 2 \\ x_2 = \frac{2}{\mathrm{m}} \quad \text{donc } \ y_1 = m \end{cases}$ et si $m < -2$, $\begin{cases} x_1 = \frac{2}{m} \quad \text{donc } y_1 = m \\ x_2 = -1 \quad \text{donc } \ y_1 = 2 \end{cases}$

<u>Conclusion :</u>

Si $m=0$ $\mathcal{H} \cap \mathfrak{D}_0 = \{C(-1\,;-2)\}$
Si $m=-2$ $\mathcal{H} \cap \mathfrak{D}_{-2} = \{C(-1\,;-2)\}$
$\forall m \in \mathbb{R} \setminus \{0;-2\}$ $\mathcal{H} \cap \mathfrak{D}_{\mathrm{m}} = \left\{C(-1\,;-2)\,;B\left(\frac{2}{m};m\right)\right\}$

Exercice 3 : Etude de fonctions

1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2$, f est définie sur $\mathbb{R}$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \end{array}\right\}$ car la limite en l'infini d'un polynôme correspond à celle du monôme de plus haut degré.

• f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme. $f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x-4)$

Un polynôme du second degré est du signe de a à l'extérieur des racines donc :

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	0	−	0	+	
Variations de f		↗		↘		↗	

2) $f(x) = (2-x)\sqrt{x}$, f est définie sur $\mathbb{R}^+$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} 2-x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty \end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

• f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ comme produit de fonctions dérivables.

$f = u \times v$ avec $u(x) = 2-x$, $u'(x) = -1$, $v(x) = \sqrt{x}$, $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f' = u' \times v + u \times v'$ donc $f'(x) = -\sqrt{x} + \frac{2-x}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x}\left(1 - \frac{3}{2}x\right)$ $f'(x)$ est du signe de $1 - \frac{3}{2}x$

Tableau de variation de f :

x	0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
Variations de f		$\nearrow$		$\searrow$	

• Equation de la tangente au point d'abscisse 1 :
$T_a: y = f'(a)(x-a) + f(a)$ or $f'(1) = -\frac{1}{2}$ et $f(1) = 1$
Donc $T_1: y = -\frac{1}{2}(x-1) + 1 = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$

3) $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$, f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$

$f(x) = \frac{2x-1}{x-3} = \frac{2-\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = -\infty$

• f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ comme fonction rationnelle.
$f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x-1$, $u'(x) = 2$, $v(x) = x-3$, $v'(x) = 1$
$f' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$ donc $f'(x) = \frac{2(x-3)-(2x-1)}{(x-3)^2} = \frac{-5}{(x-3)^2} < 0$ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$
Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; 3[$ et sur $]3; +\infty[$

4) $f(x) = \frac{x^2-3x}{x+1}$, f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$f(x) = \frac{2x-3}{1+\frac{1}{x}}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$

• f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ comme fonction rationnelle.
$f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = x^2-3x$, $u'(x) = 2x-3$, $v(x) = x+1$, $v'(x) = 1$
$f' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$ donc $f'(x) = \frac{(2x-3)(x+1)-(x^2-3x)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$
Donc $f'(x)$ est du signe de x^2+2x-3, donc du signe du coefficient de x^2 à l'extérieur des racines.
Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
Variations de f		$\nearrow$		$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$		$\nearrow$	

• Montrons que $\Omega(-1; -5)$ est un centre de symétrie. Pour ce faire, montrons que Ω est le milieu de $[MM']$, M ayant pour abscisse $-1+h$ et M' ayant pour abscisse $-1-h$ avec $h \in \mathbb{R}^*$.
$-1+h \in \mathcal{D}_f$ et $-1-h \in \mathcal{D}_f$. Calculons $f(-1+h)$ et $f(-1-h)$

$$\left.\begin{aligned} f(-1+h) &= \frac{h^2-2h+1+3-3h}{h} = h-5+\frac{4}{h} \\ f(-1-h) &= \frac{h^2+2h+1+3+3h}{-h} = -h-5-\frac{4}{h} \end{aligned}\right\} \text{ donc } \frac{f(-1+h)+f(-1-h)}{2} = -5$$

Donc $x_\Omega = \frac{x_M + x'_M}{2}$ et $y_\Omega = \frac{y_M + y'_M}{2}$. Donc $\Omega(-1; -5)$ est bien centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$

• $f(x) = \frac{x^2+x-4x-4+4}{x+1} = \frac{x(x+1)-4(x+1)+4}{x+1}$ donc $f(x) = x-4+\frac{4}{x+1}$.
• On a $f(x)-(x-4) = \frac{4}{x+1}$ donc $\forall x \in]-\infty; -1[, f(x)-(x-4) < 0$ et $\forall x \in]-1; +\infty[, f(x)-(x-4) > 0$
Donc $\mathcal{C}$ est en-dessous de Δ sur $]-\infty; -1[$ et $\mathcal{C}$ est au-dessus de Δ sur $]-1; +\infty[$.

5) $f(x) = \cos x \times (1+\cos x)$, f est définie sur $\mathbb{R}$. $f(x+2\pi) = f(x)$. f est 2π −périodique.
De plus, $f(-x) = f(x)$ donc f est paire. On limitera notre étude à $[0, \pi]$
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ sur comme produit de fonctions dérivables.
$f'(x) = (-\sin x) \times (1+\cos x) + \cos x \times (-\sin x) = -\sin x\,(1+2\cos x)$
$\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Tableau de variation de f :

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$-\sin x$	0	$-$		$-$	0
$1+2\cos x$		$+$	0	$-$	
Signe de $f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
Variations de f	2	$\searrow$	-1/4	$\nearrow$	0

Exercice 4 :

$f(x) = ax + b - \dfrac{c}{x+2}$

1) f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

$f'(x) = a + \dfrac{c}{(x+2)^2}$

2) $A(1;2) \in \mathcal{C}_f$ donc $f(1) = a + b - \frac{c}{3} = 2$

$T_{-1}: y = -x - 1$ donc $f'(-1) = -1$ soit $a + c = -1$ et $f(-1) = 0$ soit $-a + b - c = 0$

On résout donc le système : $\begin{cases} a + b - \frac{c}{3} = 2 \\ a + c = -1 \\ -a + b - c = 0 \end{cases}$ (S)

$$(S) \iff \begin{cases} a + b - \dfrac{c}{3} = 2 \\ a + c = -1 \\ b = -1 \quad (l_2 + l_3 \to l_3) \end{cases} \iff \begin{cases} a - \dfrac{c}{3} = 3 \\ a = -1 - c \\ b = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} -\dfrac{4c}{3} = 4 \\ a = -1 - c \\ b = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} c = -3 \\ a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$$

Donc $\boxed{f(x) = 2x - 1 + \frac{3}{x+2}}$

3) Deux droites sont parallèles quand elles ont même coefficient directeur. Or le coefficient de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse x vaut $f'(x)$. On résout donc $f'(x) = 1$.

$$f'(x) = 1 \iff 2 - \frac{3}{(x+2)^2} = 1 \iff 3 = (x+2)^2 \iff x^2 + 4x + 1 = 0 \iff \begin{cases} x_1 = -2 - \sqrt{3} \\ x_2 = -2 + \sqrt{3} \end{cases}$$

La tangente à $\mathcal{C}$ aux points d'abscisse x_1 et x_2 est parallèle à Δ.

Exercice 5 : Calcul de dérivées de fonctions composées

1) $f : x \longmapsto 5x - 2 \longmapsto \sqrt{5x-2}$ donc $f(x) = h \circ i(x)$ avec $h(x) = \sqrt{x}$ et $i(x) = 5x - 2$

h est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

i est dérivable sur $\mathbb{R}$, $i(x) > 0$ pour $x > \frac{2}{5}$ et $i'(x) = 5$

Donc f est dérivable sur $]\frac{2}{5}; +\infty[$, $f' = i' \times h'(i)$

Donc $\boxed{f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x-2}}}$

2) $g : x \longmapsto 2x - 3 \longmapsto (2x-3)^5$ donc $g(x) = j \circ k(x)$ avec $j(x) = x^5$ et $k(x) = 2x - 3$

j est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $j'(x) = 5x^4$ k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $k'(x) = 2$

Donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$, $g' = k' \times j'(k)$ Donc $\boxed{g'(x) = 10(2x-3)^4}$

Exercice 6 : Suites

1) $u_n = u_0 + nr$ donc $u_0 = u_{100} - 100r = 650 - 100 \times 8 = -150$

2) $S = 1 + 3 + 9 + 27 + \cdots + 59049 = 3^0 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^{10}$

C'est la somme des termes d'une suite géométrique de raison 3 donc $S = \frac{u_0(1-q^{n+1})}{1-q} = \frac{1-3^{11}}{1-3} = 88573$

$S' = 1 + 4 + 7 + \cdots + 1000$. C'est la somme des termes d'une suite arithmétique de raison 3. Donc $u_n = u_0 + nr$

Le nombre de termes est $n + 1 = \frac{u_n - u_0}{r} + 1$.Soit $n + 1 = \frac{1000-1}{3} + 1 = 334$

donc $S' = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2} = 334 \times \frac{1001}{2} = 167167$

3) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n}{1+n}$

a. $u_0 = 0 \quad u_1 = \frac{1}{2} \quad u_2 = \frac{2}{3} \quad u_3 = \frac{3}{4}$

$u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc u n'est pas une suite arithmétique.

$\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_3}{u_2}$ donc u n'est pas une suite géométrique.

b. On calcule $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Donc la suite u est croissante.

4) Montrons par récurrence que (u_n) est majorée par 4. On note $\mathcal{P}(n)$: $u_n \leq 4$

Initialisation : $u_0 = 0 \leq 4$ donc $\mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : **Soit n** $\in \mathbb{N}$. Je suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n \leq 4$.

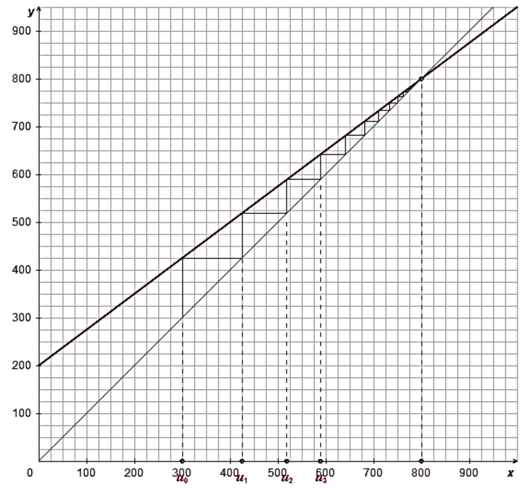
Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq 4$.

$u_n \leq 4$ donc $3u_n + 4 \leq 3 \times 4 + 4$. Or, $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, donc $\sqrt{3u_n + 4} \leq \sqrt{16}$

D'où $u_{n+1} \leq 4 \qquad (\mathcal{P}(n+1)$ est vraie)

Conclusion : D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ est vraie c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 4$

Exercice 7 : Suite arithmético-géométrique



1)- Pour obtenir la représentation des quatre premiers termes de la suite :

- Placer le terme initial u_0 = 300 sur l'axe des abscisses,
- Comme $u_1 = 0{,}75u_0 + 200$, u_1 est l'ordonnée de la droite d'équation $y = 0{,}75.x + 200$ d'abscisse 300,
- A l'aide de la droite d'équation *y=x*, rabattre l'ordonnée u_1 sur l'axe des abscisses,
- Poursuivre ce procédé pour représenter u_2 et u_3.

Graphiquement, la suite semble converger vers l'abscisse du point d'intersection des deux droites. Cette abscisse est solution de l'équation *x=0,75x+200*, c'est-à-dire *x=800.*

La suite semble donc converger vers 800.

2)- a- $\forall n$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 800 = 0{,}75.u_n + 200 - 800 = 0{,}75(v_n + 800) - 600 = 0{,}75v_n$

Donc la suite *v* est bien géométrique de raison 0,75 et de premier terme $v_0 = u_0 - 800 = -500$

b- $v_n = v_0.q^n = -500 \times 0{,}75^n$ donc u_n=v_n+800 = 800−500 × $0{,}75^n$

c- 0<0,75<1, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}75^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -500 \times 0{,}75^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 800$

3)- a- On cherche *n* / $u_n \geq 790$. On écrit un algorithme sur la calculatrice permettant de trouver la première valeur de *n*.

Initialisation
U prend la valeur 300
N prend la valeur 0
Traitement
Tant que U<790
    U prend la valeur U*0,75+200
    N prend la valeur N+1
Fin Tant que
Sortie
Afficher N

On trouve : *n=14.*

Le nombre d'abonnés sera supérieur à 790 à partir de 2024.

b- $u_n = 800 - 500 \times 0{,}75^n$ donc la suite *u* est majorée par 800. Le gérant ne pourra donc jamais espérer 1000 abonnés.

Exercice 8 : Trigonométrie

1) a) $\cos(t) = \cos\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} t = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \\ \quad ou & \\ t = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}}$

b) $\sin(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin(t) = \sin(-\frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} t = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \\ \quad ou & \\ t = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}}$

c) $\cos(t) = -\cos\frac{\pi}{5} \Leftrightarrow \cos(t) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \cos\frac{4\pi}{5} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} t = \frac{4\pi}{5} + 2k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \\ \quad ou & \\ t = -\frac{4\pi}{5} + 2k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}}$

d) $\sin(2t) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(2t) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} t = \frac{\pi}{12} + k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \\ \quad ou & \\ t = \frac{5\pi}{12} + k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}}$

e) $\sin(2x) = -\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \Leftrightarrow \sin(2x) = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{5}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{10} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \\ \quad ou \\ 2x = \pi + \frac{\pi}{10} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

donc $\sin(2x) = -\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = -\frac{\pi}{20} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \\ \quad ou \\ x = \frac{11\pi}{20} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}}$

2) $A(x) = \sin(\pi + x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(\pi - x) = -\sin x + \sin x - \sin x + \sin x = 0$

Donc $\boxed{A(x) = 0}$

$B(x) = \cos(x + \pi)\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - sin^2(-x) = -\cos x \times \cos x - \sin^2 x = -1$ Donc $\boxed{B(x) = -1}$

$C(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \sin\frac{\pi}{3} \times \cos x + \cos\frac{\pi}{3} \times \sin x - \sin\frac{\pi}{3} \times \cos x + \cos\frac{\pi}{3} \times \sin x = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\sin x$

Donc $\boxed{C(x) = \sin x}$

$D(x) = (\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = \cos^2 x + 2\cos x \sin x + \sin^2 x + \cos^2 x - 2\cos x \sin x + \sin^2 x = 2$

Donc $\boxed{D(x) = 2}$

3) Soit $x \in \mathbb{R}$, $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x}$

Exercice 9 : Loi binomiale

1. On assimile le prélèvement d'un sac à un tirage successif avec une remise. Ainsi, le prélèvement de 100 sacs correspond à la répétition indépendante d'une épreuve de Bernoulli.
   La variable aléatoire X compte le nombre de sacs défectueux sur le prélèvement. X suit la loi binomiale de paramètres 100 et 0,03. On a $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(100\,;0{,}03)$ et $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
2. L'évènement « au moins un sac défectueux » est caractérisé par des valeurs de la variable aléatoire X supérieure ou égale à 1. Ainsi, la probabilité recherchée est $P(X \geq 1)$

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{100}{0} 0.03^0 (1 - 0.03)^{100} \simeq 0.95$

Cela signifie que sur un lot de 100 sacs, il y a 95% de chances d'avoir au moins un sac défectueux.

3. $E(X) = np = 100 \times 0.03 = 3$

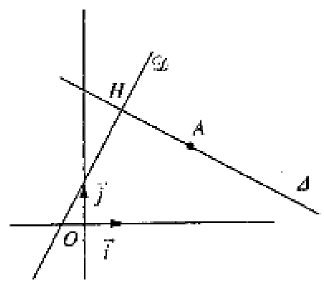
Ainsi, par prélèvement de 100 sacs, en moyenne on trouvera trois sacs défectueux.

Exercice 10 : Géométrie analytique

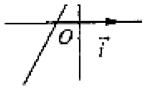
1° La droite $\mathcal{D}$ contient les points $E(0\,; 1)$ et $F(1\,; 3)$.

2° $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, donc $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ **est un vecteur normal à** $\mathcal{D}$.

3° $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à Δ.



3° $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à Δ.



Soit un point $M(x\,;y)$.
$M \in \Delta$ si, et seulement si, $\vec{u}.\overrightarrow{AM} = 0$;
$M \in \Delta$ si, et seulement si, $1 \times (x-3) + 2 \times (y-2) = 0$;
$M \in \Delta$ si, et seulement si, $x + 2y - 7 = 0$;
$M \in \Delta$ si, et seulement si, $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{7}{2}$.

Une équation de Δ est $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{7}{2}$.

4° Le point d'intersection $H(x\,;y)$ des droites $\mathcal{D}$ et Δ vérifie : $\begin{cases} y = 2x+1 \\ y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{7}{2} \end{cases}$;

ce système équivaut successivement à : $\begin{cases} y = 2x+1 \\ 2x+1 = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{7}{2} \end{cases}$

$$\begin{cases} y = 2x+1 \\ \dfrac{5}{2}x = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

D'où **$H(1\,;3)$.**

5° $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$, d'où : $AH = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

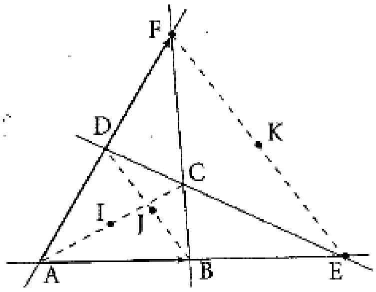
6° Le cercle $\mathcal{C}$ de centre A, tangent à $\mathcal{D}$ est le cercle dont un rayon est $[AH]$, puisque (AH) est orthogonale à $\mathcal{D}$.
Soit un point $M(x\,;y)$.
$M \in \mathcal{C}$ si, et seulement si, $AM = \sqrt{5}$;
$M \in \mathcal{C}$ si, et seulement si, $AM^2 = 5$;
$M \in \mathcal{C}$ si, et seulement si, $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$.
Une équation du cercle $\mathcal{C}$ est $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$
(ou, sous forme développée : **$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0$).**

Exercice 11 : Géométrie analytique

Dans le repère proposé, les coordonnées des points sont :
A(0, 0) ; B(1, 0) ; D(0, d) ; E(e, 0) ; F(0, 1). On a $e \neq 0$ et $d \neq 0$.

1. En utilisant le résultat de l'exercice 6, les équations demandées sont :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{(BF)} & x + y - 1 = 0\,; \\ \text{(DE)} & \dfrac{x}{e} + \dfrac{y}{d} - 1 = 0. \end{array}}$$



2. I est le milieu de [AC], il nous faut calculer les coordonnées de C :

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ \dfrac{x}{e} + \dfrac{y}{d} - 1 = 0 \end{cases}$$

En multipliant la 1[re] équation par $-\dfrac{1}{d}$ et en additionnant membre à membre :

$$x\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{d}\right) = 1 - \frac{1}{d}$$

$$x = \frac{(d-1)e}{d-e}.$$

De même : $$y = \frac{(e-1)d}{e-d}.$$

Les coordonnées de C et I sont donc respectivement :

$$\boxed{\mathrm{C}\begin{pmatrix} \dfrac{(d-1)e}{d-e} \\ \dfrac{(e-1)d}{e-d} \end{pmatrix} ;\quad \mathrm{I}\begin{pmatrix} \dfrac{(d-1)e}{2(d-e)} \\ \dfrac{(e-1)d}{2(e-d)} \end{pmatrix}.}$$

Les coordonnées de J et K sont respectivement :

$$\boxed{\mathrm{J}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{d}{2} \end{pmatrix},\quad \mathrm{K}\begin{pmatrix} \dfrac{e}{2} \\ \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

Rappel
J est le milieu de [BD], donc les coordonnées de J sont les demi-sommes des coordonnées des points B et D.

3. Montrer que $\overrightarrow{\mathrm{JI}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{JK}}$ sont colinéaires :

$$\overrightarrow{\mathrm{JI}}\begin{pmatrix} \dfrac{(d-1)e}{2(d-e)} - \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{(e-1)d}{2(e-d)} - \dfrac{d}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{d(e-1)}{2(d-e)} \\ \dfrac{d(1-d)}{2(d-e)} \end{pmatrix} ;\quad \overrightarrow{\mathrm{JK}}\begin{pmatrix} \dfrac{e-1}{2} \\ \dfrac{1-d}{2} \end{pmatrix}.$$

$\dfrac{d(e-1)}{2(d-e)} \times \dfrac{1-d}{2} - \dfrac{d(1-d)}{2(d-e)} \times \dfrac{e-1}{2} = 0$, donc les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{JI}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{JK}}$ sont colinéaires.

Les points I, J, K sont alignés.