Devoir pour la rentrée – Préparation aux Maths Complémentaires de Terminale

Le programme Mathématiques Complémentaires en Terminale est chargé et le rythme de progression est rapide. Ce qui a été vu en première ne sera donc repris que rapidement afin de consacrer plus de temps aux nombreuses notions nouvelles. Par ailleurs, vous devez arriver en cours ayant déjà « dérouillé » les mécanismes de calcul. C'est pourquoi il est impératif d'être prêt le jour de la rentrée et d'avoir fait un minimum d'entraînement. Révisez bien les formules de dérivées.

Les exercices proposés concernent les notions fondamentales de première. Toutes ces notions seront dans le premier devoir de terminale, mi-septembre.

Ces exercices sont à rendre le jour de la rentrée, le 7 septembre. Ils seront notés en fonction de la rigueur avec laquelle vous aurez suivi la méthode demandée. Le premier DS de l'année portera sur ces exercices. <u>Mon conseil est de les faire les trois semaines précédents la retraite de rentrée (à partir du 16 août)</u>.

Méthode de travail :

1) Avoir son cours de première avec soi et s'y replonger si besoin est.
2) Relire rapidement les fiches ou résumés de cours qui ont pu être faits tout au long de l'année.
3) Chercher les exercices et les rédiger sur feuille SANS utiliser le corrigé. Préciser le temps imparti à chaque exercice sur votre copie.
4) Corriger avec soin les exercices (les traces de correction devront apparaître OBLIGATOIREMENT sur la copie).
5) Refaire les exercices qui ont posé des difficultés. Ce travail est également à rendre.

Nous vous faisons confiance : un travail où vous vous contenteriez de recopier le corrigé ne serait qu'une parfaite perte de temps !
En cas de besoin, mon adresse email est la suivante : cincinotti@hotmail.com

Bonnes vacances !

Le professeur de Maths Complémentaires
Michel Cinotti

« Le travail opiniâtre surmonte tous les obstacles » (Virgile)

Exercice 1 : Révisions calculatoires

1. Mettre les expressions suivantes sous la forme d'un (seul) quotient :

$$A=\frac{\dfrac{x}{x-y}-\dfrac{y}{x+y}}{\dfrac{y}{x-y}+\dfrac{x}{x+y}} \qquad\qquad B=\frac{1}{x-\dfrac{1}{3+\dfrac{x-2}{5-x}}}$$

2. Simplifier au maximum les expressions ci-dessous à l'aide d'un produit remarquable (attention aux signes) :

$$A=\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{5}\right)^2 \qquad B=\left(7\sqrt{2}-5\sqrt{3}\right)\left(5\sqrt{3}+7\sqrt{2}\right) \qquad C=\left(7\sqrt{7}-5\sqrt{5}\right)\left(-7\sqrt{7}-5\sqrt{5}\right)$$

$$D=\left(\sqrt{72}-\sqrt{288}\right)\left(\sqrt{288}-\sqrt{72}\right) \qquad E=\left(2-\sqrt{3}\right)^n\left(2+\sqrt{3}\right)^n$$ où $n\in\mathbb{N}^*$ quelconque fixé

3. Réécrire les expressions ci-dessous sans radical au dénominateur :

$$A=\frac{1}{5-2\sqrt{2}} \qquad B=\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}+1} \qquad C=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{5\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$$

4. Soient a, b deux réels non nuls. Simplifier au maximum les expressions ci-dessous :

$$A = [(a^2b^3)^4]^5\ ;\ B = (a^3b^{-4})^2 \times (-2a^{-5}b^6)^3\ ;\ C = \left(\frac{a^2}{b^3}\right)^2 \times \left(\frac{a}{4b}\right)^3 \times \left(\frac{b^2}{a}\right)^2\ ;\ \ D = \left(\frac{a^1b^{-2}}{a^{-3}b^4}\right)^5 \div \left(\frac{a^{-6}b^5}{a^4b^{-3}}\right)^3$$

5. Simplifier au maximum les quantités ci-dessous :

$$A = (-4)^{60} \times (-0{,}125)^{41} \qquad B = 40^{71} \times (1{,}25)^{48} \times 10^{-119}$$

Exercice 2 : Polynômes, équations et inéquations

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

(1) $x^2 - 5x - 6 = 0$

(2) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = 0$

(3) $x^2 + 2x + 2 = 0$

(4) $-6x^2 + 12x + 90 \geq 0$

(5) $\frac{1}{4}x^2 - x + 1 > 0$

(6) $e^{2x^2+3} = e^{7x}$

(7) $e^{3x+5} \leq 1$

2) Soit le polynôme f défini par $f(x) = x^2 - 2x - 3$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

a) Déterminer la forme canonique de $f(x)$.

b) Donner un encadrement de $f(x)$ pour x appartenant à $[-2\ ;0]$.

3) Soit $P(x) = x^3 - 15x - 4$.

a) Vérifier que 4 est une racine de $P(x)$.

b) Déterminer les réels *a, b* et *c* tels que $P(x) = (x-4)(ax^2 + bx + c)$.

c) Résoudre l'inéquation $P(x) \geq 0$.

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$:

(9) $-x^2 + \sqrt{3} + 6/x^2 \leq 0$

(10) $|-3x + 4| + |-5 + x| = 10$

(11) $|2x - 1| \leq |x + 2|$

(12) $x + 1 \geq \sqrt{3 - x}$

(13) $e^{2x} + 3e^x - 4 \geq 0$

Exercice 3 : Etude de fonctions

Etudier les fonctions (c'est-à-dire : ensemble de définition, limites (fonctions 1 à 4), dérivée et variations) et tracer de manière approximative l'allure de chaque courbe :

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2$
2. $f(x) = (2 - x)\sqrt{x}$, déterminer également l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.
3. $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$
4. $f(x) = \frac{x^2-3x}{x+1}$. Questions supplémentaires :
   a. Démontrer également que $\Omega(-1;-5)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}$.
   b. Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout $x \in \mathcal{D}_f, f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$.
   c. En déduire la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à la droite Δ d'équation $y = ax + b$.
5. $f(x) = 3e^{2-x} + e$

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ par $f(x) = ax + b - \frac{c}{x+2}$ où a, b et c sont des constantes réelles.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Déterminer a, b et c sachant que $\mathcal{C}$ passe par le point $A(1; 2)$ et que la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse -1 a pour équation $y = -x - 1$.
3. Trouver les abscisses des points où la tangente à $\mathcal{C}$ en ce point est parallèle à la droite Δ d'équation :
   $y = x + 3$

Exercice 5 : Calcul de dérivées de fonctions composées

Calculer les dérivées des fonctions suivantes en utilisant la formule de dérivée des fonctions composées et en précisant bien leur domaine de dérivabilité.

1. $f(x) = \sqrt{5x - 2}$
2. $g(x) = (2x - 3)^5$
3. $h(x) = e^{x^2 - 3x}$

Exercice 6 :

On considère l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation $y = \frac{2}{x}$ et les droites $\mathcal{D}_m$ d'équation $y = m(x + 1) - 2$ où $m \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que les droites $\mathcal{D}_m$ passent par un point fixe C, indépendant de m, et que C $\in \mathcal{H}$.
2) Que représente m pour la droite $\mathcal{D}_m$?
3) Etudier, suivant les valeurs de m , les points d'intersection de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{D}_m$.

Exercice 7 : Suites

Les questions suivantes sont indépendantes :

1. La suite (u_n). est arithmétique de raison 8. On sait que $u_{100} = 650$. Que vaut u_0 ?
2. Calculer la valeur exacte de S=1+3+9+27+…+59049 et S'=1+4+7+…+1000
3. Soit la suite (u_n) définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n}{1+n}$.
   a. La suite est-elle arithmétique ? géométrique ?
   b. Etudier les variations de u.

Exercice 8 : Suite arithmético-géométrique

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 300$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}75u_n + 200$.

1. Utiliser les droites d'équations $y = x$ et $\mathrm{y} = 0{,}75\mathrm{x} + 200$ pour construire les quatre premiers termes de la suite (u_n). Que peut-on conjecturer à propos de la limite de la suite (u_n) ?
2. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 800$.
   a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b. Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.
      En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 800 - 500 \times 0{,}75^n$.
   c. La suite (u_n) est-elle convergente ?
3. Une salle de spectacle propose un abonnement pour l'année. En 2010, il y avait 300 abonnés.
   On estime que chaque année, il y a 200 nouveaux abonnés et que d'une année sur l'autre, 75 % des abonnés renouvellent leur abonnement.
   On note u_n le nombre d'abonnés pour l'année 2010+n. On a donc $u_0 = 300$ et $u_{n+1} = 0{,}75u_n + 200$.
   a. Dans combien d'années, le nombre d'abonnés sera-t-il supérieur à 790 ? (utiliser un algorithme)
   b. Dans ces conditions, est-il possible pour le gérant de la salle de spectacle d'espérer 1000 abonnés ?

Exercice 9 : _Probabilités conditionnelles_

Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre pondéré ci-contre.
On sait de plus que P(B) = 0, 39.
1. Calculer la probabilité de l'événement $A \cap B$.
2. En déduire la probabilité de B sachant A.