Correction du devoir de rentrée

I Calcul algébrique

Exercice 1

Soient $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}^*$, simplifions les écritures A, B et C :

1. $A = \frac{2^{n+1}}{2} = \frac{2\times 2^n}{2} = 2^n$
2. $B = (-4)^{60} \times (-0{,}125)^{41} = -(2^{120} \times 2^{-123}) = -0{,}125$
3. $C = \frac{(a^2b^3)^2}{(a^{-1}b)^3} = \frac{a^4b^6}{a^{-3}b^3} = a^7b^3$

Exercice 2

Après avoir déterminé l'ensemble de définition, effectuons les calculs des expressions A, B, C et D où x représente une variable réelle

1. A est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0;-1\}$

$$A = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = \frac{x-(x+1)}{x(x+1)} = -\frac{1}{x(x+1)}$$

2. B est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{6\}$

$$B = \frac{x}{2x-12} - \frac{3}{x-6} = \frac{x-6}{2(x-6)} = \frac{1}{2}$$

3. C est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$

$$C = \frac{\frac{5}{x+1}}{\frac{15}{x^2-1}} = \frac{5}{x+1} \times \frac{x^2-1}{15} = \frac{x-1}{3}$$

4. D est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0;1\}$

$$D = \frac{\frac{3x}{x-1}}{x} = \frac{3x}{x-1} \times \frac{1}{x} = \frac{3}{x-1}$$

Exercice 3

1. Simplifions au maximum les expressions A et B :

1. $A = \left(2\sqrt{3} - 3\sqrt{5}\right)^2 = 4 \times 3 - 12\sqrt{15} + 9 \times 5 = 57 - 12\sqrt{15}$
2. $B = \left(7\sqrt{7} - 5\sqrt{5}\right)\left(-7\sqrt{7} - 5\sqrt{5}\right) = -\left(7\sqrt{7} - 5\sqrt{5}\right)\left(7\sqrt{7} + 5\sqrt{5}\right) = -(49 \times 7 - 25 \times 5)$

   Donc $B = -218$

2. Simplifions les expressions suivantes afin qu'il n'y ait plus de radical au dénominateur

1. $A = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$
2. $B = \frac{1}{5-2\sqrt{2}} = \frac{5+2\sqrt{2}}{(5-2\sqrt{2})(5+2\sqrt{2})} = \frac{5+2\sqrt{2}}{25-8} = \frac{5+2\sqrt{2}}{17}$
3. $C = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}+1} = \frac{3\sqrt{5}(2\sqrt{5}-1)}{(2\sqrt{5}+1)(2\sqrt{5}-1)} = \frac{30-3\sqrt{5}}{19}$
4. $D = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{5\sqrt{3}+3\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(5\sqrt{3}-3\sqrt{2})}{(5\sqrt{3}+3\sqrt{2})(5\sqrt{3}-3\sqrt{2})} = \frac{5\sqrt{6}+15-6-3\sqrt{6}}{75-18} = \frac{9+2\sqrt{6}}{57}$

Correction du devoir de rentrée

Exercice 4

1) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_1) : $2x - 3(x+1) = \frac{1-3x}{2}$

(E_1) est définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, x est solution de (E_1) si, et seulement si, $2x - 3x - 3 - \frac{1-3x}{2} = 0$

si, et seulement si, $\frac{2(-x-3)}{2} - \frac{1-3x}{2} = 0$

si, et seulement si, $-2x - 6 - (1 - 3x) = 0$

si, et seulement si, $-2x - 6 - 1 + 3x = 0$

si, et seulement si, $x - 7 = 0$

c'est-à-dire $x = 7$

Donc $\boxed{\mathcal{S} = \{7\}}$

2) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_2) : $\frac{x+3}{2} - \frac{4x-3}{3} = 1 - \frac{7x-12}{6}$

(E_2) est définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, x est solution de (E_2) si, et seulement si, $x\left(\frac{3}{6} - \frac{8}{6} + \frac{7}{6}\right) = 1 + 2 - \frac{3}{2} - 1$,

c'est-à-dire $x = \frac{3}{2}$ donc $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{3}{2}\right\}}$

3) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_3) : $(2x+3)(x+5) - (2x-7)(x-1) = 0$

(E_3) est définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, x est solution de (E_3) si, et seulement si,

$$2x^2 + 10 + 3x + 15 - (2x^2 - 7x - 2x + 7) = 0$$

si, et seulement si, $22x = -8$, c'est-à-dire $x = -\frac{4}{11}$

donc $\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\frac{4}{11}\right\}}$

4) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_4) : $\frac{2x-3}{4} + \frac{x-1}{6} = \frac{2x-5}{3}$

(E_4) est définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, x est solution de (E_4) si, et seulement si, $x\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{2}{3}\right) = -\frac{5}{3} + \frac{3}{4} + \frac{1}{6}$,

c'est-à-dire $0 = -\frac{9}{12}$, impossible donc $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$

Correction du devoir de rentrée

Exercice 5

1) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_1) : $\frac{3}{5x+1} = \frac{5}{2}$

(E_1) est définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{5}\right\}$

Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{5}\right\}$, x est solution de (E_1) si, et seulement si, $6 = 25x + 5$, c'est-à-dire $x = \frac{1}{25}$

donc $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{25}\right\}}$

2) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_2) : $\frac{2x-7}{2x-3} - 1 = \frac{2}{x-1}$

(E_2) est définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{3}{2}; 1\right\}$

Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{3}{2}; 1\right\}$, x est solution de (E_2) ssi $\frac{(2x-7)(x-1)-(2x-3)(x-1)-2(2x-3)}{(2x-3)(x-1)} = 0$

ssi $\frac{2x^2-9x+7-2x^2+5x-3-4x+6}{(2x-3)(x-1)} = 0$

ssi $\frac{-8x+10}{(2x-3)(x-1)} = 0$

ssi $-8x + 10 = 0$, c'est-à-dire $x = \frac{5}{4}$

donc $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{5}{4}\right\}}$

3) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_3) : $\frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} = 0$

(E_3) est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1; -2; -3\}$

Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1; -2; -3\}$, x est solution de (E_3) si, et seulement si, $\frac{(x+3)+(x+1)}{(x+1)(x+2)(x+3)} = 0$

si, et seulement si $\frac{2x+4}{(x+1)(x+2)(x+3)} = 0$

si, et seulement si $2x + 4 = 0$

si, et seulement si $x = -2$

donc $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$

Exercice 6

1) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I_1) : $2(3x - 1) < 7(x - 2)$

(I_1) est définie sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$, x est solution de (I_1) si, et seulement si, $6x - 2 - 7x + 14 < 0$

si, et seulement si, $-x + 12 < 0$

si, et seulement si, $x > 12$

Donc $\boxed{\mathcal{S} =]12; +\infty[}$

2) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I_2) : $3x - 1 < x(x + 3)$

(I_2) est définie sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$, x est solution de (I_2) si, et seulement si, $3x - 1 - x^2 - 3x < 0$

si, et seulement si, $-1 - x^2 < 0$

Correction du devoir de rentrée

si, et seulement si, $x^2 > -1$

Or un carré est toujours positif donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 > -1$

Donc $\boxed{\mathcal{S} = \mathbb{R}}$

3) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I_3) : $(2-x)(3x+7) \geq 4 - x^2$

(I_3) est définie sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$, x est solution de (I_3) si, et seulement si, $(2-x)(3x+7) - (2-x)(2+x) \geq 0$

si, et seulement si, $(2-x)(3x+7-2-x) \geq 0$

si, et seulement si, $(2-x)(2x+5) \geq 0$

Dressons le tableau de signe de $P(x) = (2-x)(2x+5)$

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		2		$+\infty$
$2-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$2x+5$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $\boxed{\mathcal{S} = [-\frac{5}{2}; 2]}$

4) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I_4) : $\frac{3}{1-3x} \geq \frac{2}{1-2x}$

(I_4) est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right\}$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right\}$, x est solution de (I_4) si, et seulement si, $\frac{3}{1-3x} - \frac{2}{1-2x} \geq 0$

si, et seulement si, $\frac{3(1-2x)-2(1-3x)}{(1-3x)(1-2x)} \geq 0$

si, et seulement si, $\frac{3-6x-2+6x}{(1-3x)(1-2x)} \geq 0$

si, et seulement si, $\frac{1}{(1-3x)(1-2x)} \geq 0$

Dressons le tableau de signe de $A(x) = \frac{1}{(1-3x)(1-2x)}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$1-3x$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$1-2x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$A(x)$		$+$	||	$-$	||	$+$	

Correction du devoir de rentrée

Donc $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty ; \frac{1}{3}[\cup]\frac{1}{2} ; +\infty[}$

5) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I_5) : $\frac{2x+5}{1+2x} < \frac{1-2x}{5-2x}$

(I_5) est définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right\}$

Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right\}$, x est solution de (I_4) si, et seulement si, $\frac{1-2x}{5-2x} - \frac{2x+5}{1+2x} > 0$

si, et seulement si, $\frac{(1-2x)(1+2x)-(2x+5)(5-2x)}{(5-2x)(1+2x)} > 0$

si, et seulement si, $\frac{1-4x^2-25+4x^2}{(5-2x)(1+2x)} > 0$

si, et seulement si, $\frac{-24}{(5-2x)(1+2x)} > 0$

Dressons le tableau de signe de $B(x) = \frac{-24}{(5-2x)(1+2x)}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
-24		$-$		$-$		$-$	
$5-2x$		$+$	0	$-$		$-$	
$1+2x$		$-$		$-$	0	$+$	
$B(x)$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	

Donc $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty ; -\frac{1}{2}[\cup]\frac{5}{2} ; +\infty[}$

6) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I_6) : $|2x-1| \leq |x+2|$

(I_6) est définie sur $\mathbb{R}$

On détermine les valeurs frontières de chaque valeur absolue : $2x-1=0$ soit $x=\frac{1}{2}$ et $x+2=0$ soit $x=-2$

On remplit un tableau de forme :

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$\lvert 2x-1\rvert$		$-2x+1$	5	$-2x+1$	0	$2x-1$	
$\lvert x+2\rvert$		$-x-2$	0	$x+2$	$\frac{5}{2}$	$x+2$	
(I_6)		$-2x+1 \leqslant -x-2$ $x \geqslant 3$ impossible $S_1 = \varnothing$		$-2x+1 \leqslant x+2$ $x \geqslant -\frac{1}{3}$ $S_2 = \left[-\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$		$2x-1 \leqslant x+2$ $x \leqslant 3$ $S_3 = \left[\frac{1}{2};3\right]$	

D'où $\boxed{\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3 = [-\frac{1}{3};3]}$

Correction du devoir de rentrée

II Etudes de fonctions

Exercice 1

Soit f la fonction trinôme ou polynôme du 2nd degré définie sur $\mathbb{R}$

par $f(x) = -2x^2 + 4x + 11$

nous posons $a = -2$ $b = 4$ $c = 11$

1. Déterminons la forme canonique de la fonction f :

1ère méthode :

$$f(x) = -2x^2 + 4x + 11$$
$$= -2\left[x^2 - 2x - \frac{11}{2}\right]$$
$$= -2\left[(x-1)^2 - 1 - \frac{11}{2}\right]$$
$$= -2\left[(x-1)^2 - \frac{13}{2}\right]$$

ainsi $\boxed{f(x) = -2(x-1)^2 + 13}$

2ème méthode :

$$f(x) = -2x^2 + 4x + 11$$

$\alpha = -\frac{b}{2a}$ $\alpha = \frac{-4}{-4}$ $\alpha = 1$

$\beta = f(\alpha)$ $\beta = 13$

d'où $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$

ici $\boxed{f(x) = -2(x-1)^2 + 13}$

Correction du devoir de rentrée

Nous pouvons déterminer la forme factorisée de f puisque $f(x)$ s'écrit sous la forme $A^2 - B^2$

$$f(x) = 13 - 2(x-1)^2$$

$$\boxed{f(x) = \left(\sqrt{13} - \sqrt{2}(x-1)\right)\left(\sqrt{13} + \sqrt{2}(x-1)\right)}$$

2. Déterminons les variations de f

nous savons que $a = -2$

donc $a < 0$ d'où

$\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f

$\mathcal{C}_f$ admet un maximum en S de coordonnées α et β $S(1\,;13)$

D'après le cours, une fonction trinôme pour laquelle $a < 0$ admet comme tableau de variation

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Variation de f	$-\infty$	$\nearrow$	13	$\searrow$	$-\infty$

sur $]-\infty\,;1]$ f est croissante

sur $[1\,;+\infty[$ f est décroissante

Correction du devoir de rentrée

3. Déterminons un encadrement de $f(x)$ pour $x \in [1 ; 3]$

D'après le 1. nous savons que sur $[1 ; 3]$ f est décroissante

c'est à dire

$\forall x_1 \in [1 ; 3]$ et $\forall x_2 \in [1 ; 3]$

si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) > f(x_2)$

D'où $\forall x \in [1 ; 3]$

$1 \leq x$ implique $f(1) \geq f(x)$

et $x \leq 3$ implique $f(x) \geq f(3)$

ainsi $\boxed{\forall x \in [1 ; 3] \quad f(x) \in [f(3) ; f(1)]}$

or $f(1) = 13$ et $f(3) = 5$

d'où

$\boxed{\text{si } x \in [1 ; 3] \text{ alors } f(x) \in [5 ; 13]}$

4. La réciproque de cette affirmation

est si $f(x) \in [5 ; 13]$ alors $x \in [1 ; 3]$

or $f(0) = 11$ $\quad 11 \in [5 ; 13]$

mais $0 \notin [1 ; 3]$

donc la réciproque est fausse.

Correction du devoir de rentrée

Exercice 2

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x-5}{x-3}$

1. f est définie sur l'ensemble des valeurs réelles telles que $x - 3 \neq 0$

$$\boxed{Df = R\backslash\{3\}}$$

2. Démontrons que $\forall x \in Df \quad f(x) = 2 + \frac{1}{x-3}$

Calculons pour tout $x \in Df$

$$2 + \frac{1}{x-3} = \frac{2(x-3)}{x-3} + \frac{1}{x-3}$$

$$2 + \frac{1}{x-3} = \frac{2x-6+1}{x-3}$$

$$2 + \frac{1}{x-3} = \frac{2x-5}{x-3}$$

$$2 + \frac{1}{x-3} = f(x)$$

Donc,

$$\boxed{\forall x \in Df \quad f(x) = 2 + \frac{1}{x-3}}$$

2. On a : $\forall x \in Df \quad f(x) = 2 + \frac{1}{x-3}$

Soit $x_1 \in]-\infty; 3[$ Soit $x_2 \in]-\infty; 3[$ tels que $x_1 < x_2$

$f(x_1) = 2 + \frac{1}{x_1-3}$ $\qquad$ $f(x_2) = 2 + \frac{1}{x_2-3}$

On a $\quad x_1 < x_2 < 3$

D'où $\quad x_1 - 3 < x_2 - 3 < 0$

D'où $\quad \frac{1}{x_1-3} > \frac{1}{x_2-3} \quad (< 0)$

(par stricte décroissance de la fonction inverse sur un ensemble de réels strictement négatifs)

D'où $\quad \frac{1}{x_1-3} + 2 > \frac{1}{x_{2-3}} + 2$

C'est-à-dire $\quad f(x_1) > f(x_2)$

Correction du devoir de rentrée

Ainsi, pour $x_1 \in]-\infty\,;3[$ et $x_2 \in]-\infty\,;3[$, si $x_1 < x_2$ *alors* $f(x_1) > f(x_2)$ La fonction f est donc strictement décroissante sur $]-\infty;3[$

La fonction f est une fonction homographique, elle a le même sens de variation sur l'intervalle $]-\infty;3[$ et sur l'intervalle $]3;+\infty[$

<u>Donc la fonction f est également strictement décroissante sur $]3;+\infty[$.</u>

III Droites, systèmes et vecteurs

Exercice 1

1. Résolvons le système où x et y sont des réels :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 4x - 2y = -10 \end{cases} \qquad \begin{cases} -4x - 6y = -14 \\ 4x - 2y = -10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8y = -24 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases} \qquad \begin{aligned} y &= 3 \\ x &= \frac{1}{2}(7-9) \end{aligned}$$

$$\boxed{S = \{(-1\,;\,3)\}}$$

2. On en déduit les solutions de

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x-1} + 3y = 7 \\ \dfrac{4}{x-1} - 2y = -10 \end{cases} \qquad x \neq 1$$

on pose $X = \dfrac{1}{x-1}$

d'où $-1 = \dfrac{1}{x-1}$ $\qquad x = 0$

$$\boxed{S = \{(0\,;\,3)\}}$$

Correction du devoir de rentrée

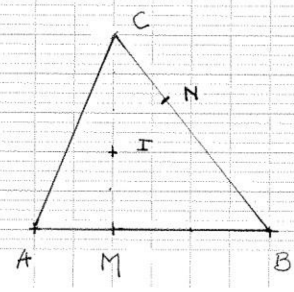
Exercice 2

Soit A, B, C un triangle non aplati.
On considère les points M, N et I
définis par

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{CI} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CM}$

$\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

1.



Correction du devoir de rentrée

2. Expression de $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

on sait que $\overrightarrow{CI} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CM}$

d'où $\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AI}\right) = \frac{3}{5}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}\right)$

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AC} - \frac{3}{5}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AI} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}}$$

3. On sait que

$$\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$$

d'où $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)$

$$\boxed{\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}}$$

4. On en déduit que $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AN}$

Par définition, **les points A, I, N sont alignés.**