

A n'utiliser qu'après avoir VRAIMENT cherché et rédigé les exercices !

Exercice 1 : Révisions calculatoires

1.

$$A = \frac{\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y}}{\frac{y}{x-y} + \frac{x}{x+y}} = \frac{\frac{x(x+y) - y(x-y)}{x^2 - y^2}}{\frac{y(x+y) + x(x-y)}{x^2 - y^2}} = \frac{x^2 + y^2}{y^2 + x^2} = 1$$

$$B = \frac{1}{x - \frac{1}{3 + \frac{x-2}{5-x}}} = \frac{1}{x - \frac{5-x}{13-2x}} = \frac{13-2x}{-2x^2 + 14x - 5}$$

2. $A = (2\sqrt{3} - 3\sqrt{5})^2 = 57 - 12\sqrt{15}$ $B = (7\sqrt{2} - 5\sqrt{3})(5\sqrt{3} + 7\sqrt{2}) = 23$
 $C = (7\sqrt{7} - 5\sqrt{5})(-7\sqrt{7} - 5\sqrt{5}) = -218$ $D = (\sqrt{72} - \sqrt{288})(\sqrt{288} - \sqrt{72}) = -72$
 $E = (2 - \sqrt{3})^n (2 + \sqrt{3})^n = [(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})]^n = 1^n = 1$

3.

$$A = \frac{1}{5 - 2\sqrt{2}} = \frac{5 + 2\sqrt{2}}{17}$$

$$B = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{5} + 1} = \frac{30 - 3\sqrt{5}}{19}$$

$$C = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{5\sqrt{3} + 3\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3})(5\sqrt{3} - 3\sqrt{2})}{57} = \frac{9 + 2\sqrt{6}}{57}$$

4.

$$A = [(a^2 b^3)^4]^5 = a^{40} b^{60}$$

$$B = (a^3 b^{-4})^2 \times (-2a^{-5} b^6)^3 = -8a^{-9} b^{10};$$

$$C = \left(\frac{a^2}{b^3}\right)^2 \times \left(\frac{a}{4b}\right)^3 \times \left(\frac{b^2}{a}\right)^2 = \frac{a^5}{64b^5}$$

$$D = \left(\frac{a^1 b^{-2}}{a^{-3} b^4}\right)^5 \div \left(\frac{a^{-6} b^5}{a^4 b^{-3}}\right)^3 = a^{50} b^{-54}$$

5.

$$A = (-4)^{60} \times (-0,125)^{41} = -(2^{120} \times 2^{-123}) = -0,125$$

$$B = 40^{71} \times (1,25)^{48} \times 10^{-119} = 2^{213} \cdot 5^{71} \cdot 5^{48} \cdot 2^{-96} \cdot 2^{-119} \cdot 5^{-119} = 2^{-2} = 0,25$$

Exercice 2 :

1). $E_1: x^2 - 5x - 6 = 0$ -1 est une racine évidente, or $ax_1 x_2 = -6$ d'où 6 est l'autre racine.
 (autre méthode : utilisation du discriminant)

$$\mathcal{S} = \{-1; 6\}$$

$E_2: x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$, x est solution de E_2 si et seulement si (ssi) $(x - \sqrt{3})^2 = 0$ (identité remarquable)

ssi $x = \sqrt{3}$ d'où $\mathcal{S} = \{\sqrt{3}\}$

$E_3: x^2 + 2x + 2 = 0$ Calculons le discriminant du polynôme $x^2 + 2x + 2 : \Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \times 2 = -4 < 0$
 Donc ce polynôme du 2nd degré n'admet pas de racines. $\mathcal{S} = \emptyset$

$I_4: -6x^2 + 12x + 90 \geq 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$, x est solution de I_4 ssi $x^2 - 2x - 15 \leq 0$

Calculons le discriminant du polynôme $x^2 - 2x - 15 : \Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-15) = 64 = (8)^2 > 0$

Donc ce polynôme du 2nd degré admet deux racines $\begin{cases} x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-8}{2} = -3 \\ x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+8}{2} = 5 \end{cases}$

Or un polynôme du 2nd degré est du signe du coefficient de x^2 à l'extérieur des racines donc $\mathcal{S} = [-3; 5]$

$I_5: \frac{1}{4}x^2 - x + 1 > 0 \quad \Delta = (-1)^2 - 4 \times \frac{1}{4} \times 1 = 0$

donc le polynôme $\frac{1}{4}x^2 - x + 1$ admet une seule racine : $x_0 = -\frac{b}{2a} = 2$. D'où $\mathcal{S} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$I_6: 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$ On pose $X = \cos x$ et on résout $2X^2 + 3X - 2 = 0$. $\Delta = 25$

Donc $\begin{cases} X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-5}{4} = -2 \\ X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$

Or $X = \cos x$. On résout donc $\cos x = -2$ ou $\cos x = \frac{1}{2}$

$\forall x \in \mathbb{R}, \cos x \in [-1; 1]$, donc $\cos x = -2$ est impossible.

$\cos x = \frac{1}{2}$ ssi $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ d'où $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi; -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \right\}$

$E_6: e^{2x^2+3} = e^{7x}$

Soit $x \in \mathbb{R}$, x est solution de E_6 ssi $2x^2 + 3 = 7x$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R}

ssi $x = \frac{7-\sqrt{25}}{4} = \frac{1}{2}$ ou $x = \frac{7+\sqrt{25}}{4} = 3$ ($\Delta = (-7)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 25$) D'où $\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{2}; 3 \right\}$

$I_7: e^{3x+5} \leq 1$

Soit $x \in \mathbb{R}$, x est solution de E_6 ssi $e^{3x+5} \leq e^0$

ssi $3x + 5 \leq 0$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R}

ssi $x \leq -\frac{5}{3}$ D'où $\mathcal{S} =]-\infty; -5/3]$

2) a) $f(x) = x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x + 1 - 1 - 3$ donc $f(x) = (x-1)^2 - 4$

b) $-2 \leq x \leq 0$ ssi $0 \leq x^2 \leq 4$ car la fonction carrée est strictement décroissante sur \mathbb{R}^-

et $-2 \leq x \leq 0$ ssi $0 \leq -2x \leq 4$

donc si $-2 \leq x \leq 0$ alors $0 + 0 - 3 \leq x^2 - 2x - 3 \leq 4 + 4 - 3$ c'est-à-dire $f(x) \in [-3; 5]$

Autre méthode possible : on montre que f est décroissante sur $] -\infty; -1]$ et donc que :

si $-2 \leq x \leq 0$ alors $f(0) \leq f(x) \leq f(-2)$.

3) a) $P(4) = 4^3 - 15 \times 4 - 4 = 64 - 60 - 4 = 0$ donc 4 est racine de $P(x)$.

b) $(x-4)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + x^2(-4a+b) + x(-4b+c) - 4c$

or $P(x) = x^3 - 15x - 4$ donc par identification, on en déduit que $a = 1, b = 4a = 4, c = 1$

donc $P(x) = (x-4)(x^2 + 4x + 1)$

Cherchons les racines de $x^2 + 4x + 1$: $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 = 12$ donc $\begin{cases} x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-\sqrt{12}}{2} = -2 - \sqrt{3} \\ x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+\sqrt{12}}{2} = -2 + \sqrt{3} \end{cases}$

D'où $P(x) = (x-4)(x+2+\sqrt{3})(x+2-\sqrt{3})$

Tableau de signe :

x	$-\infty$	$-2 - \sqrt{3}$	$-2 + \sqrt{3}$	4	$+\infty$	
$x - 4$		-	-	0	+	
$x + 2 + \sqrt{3}$		-	0	+	+	
$x + 2 - \sqrt{3}$		-	-	0	+	
$P(x)$		-	0	+	0	+

Donc $\mathcal{S} = [-2 - \sqrt{3}; -2 + \sqrt{3}] \cup [4; +\infty[$

4) $I_9 : -x^2 + \sqrt{3} + \frac{6}{x^2} \leq 0$ Valeur interdite : $x = 0$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, x est solution de I_9 ssi $\frac{-x^4 + \sqrt{3}x^2 + 6}{x^2} \leq 0$
ssi $-x^4 + \sqrt{3}x^2 + 6 \leq 0$ car $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $x^2 > 0$

On pose $X = x^2$ et on résout $-X^2 + \sqrt{3}X + 6 \leq 0$: $\Delta = 27 > 0$ donc $\begin{cases} X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\sqrt{3} - \sqrt{27}}{-2} = 2\sqrt{3} \\ X_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{27}}{-2} = -\sqrt{3} \end{cases}$

Soit $-(X + \sqrt{3})(X - 2\sqrt{3}) \leq 0$ Or $X = x^2$ donc on résout $-(x^2 + \sqrt{3})(x^2 - 2\sqrt{3}) \leq 0$

Or $x^2 + \sqrt{3} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$ donc il suffit de résoudre $x^2 - 2\sqrt{3} \geq 0$

$x^2 - 2\sqrt{3} \geq 0$ ssi $(x - \sqrt{2\sqrt{3}})(x + \sqrt{2\sqrt{3}}) \geq 0$ or un polynôme du 2nd degré est du signe de a à l'extérieur des racines

donc $\mathcal{S} =]-\infty; -\sqrt{2\sqrt{3}}] \cup [\sqrt{2\sqrt{3}}; +\infty[$

$E_{10} : |-3x + 4| + |-5 + x| = 10$

On détermine les valeurs frontières de chaque valeur absolue : $-3x + 4 = 0$ soit $x = 4/3$ et $-5 + x = 0$ soit $x = 5$

On remplit un tableau de forme :

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	5	$+\infty$
$ -3x + 4 $	$-3x + 4$	0	$3x - 4$	$3x - 4$
$ -5 + x $	$5 - x$	$\frac{11}{3}$	$5 - x$	$-5 + x$
(E_1)	$-4x + 9 = 10$ $x = -\frac{1}{4}$ possible	$2x + 1 = 10$ $x = \frac{9}{2}$ possible	$4x - 9 = 10$ $x = \frac{19}{4}$ impossible	

D'où $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{1}{4}; \frac{9}{2} \right\}$

$I_{11} : |2x - 1| \leq |x + 2|$

On détermine les valeurs frontières de chaque valeur absolue : $2x - 1 = 0$ soit $x = \frac{1}{2}$ et $x + 2 = 0$ soit $x = -2$

On remplit un tableau de forme :

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
$ 2x - 1 $	$-2x + 1$	5	$-2x + 1$	0	$2x - 1$
$ x + 2 $	$-x - 2$	0	$x + 2$	$\frac{5}{2}$	$x + 2$
(E_2)	$-2x + 1 \leq -x - 2$ $x \geq 3$ impossible $\mathcal{S}_1 = \emptyset$	$-2x + 1 \leq x + 2$ $x \geq -\frac{1}{3}$ $\mathcal{S}_2 = \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{2} \right]$	$2x - 1 \leq x + 2$ $x \leq 3$ $\mathcal{S}_3 = \left[\frac{1}{2}; 3 \right]$		

D'où $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3 = \left[-\frac{1}{3}; 3 \right]$

$I_{12} : x + 1 \geq \sqrt{3 - x}$ $\sqrt{3 - x}$ est définie pour $x \leq 3$. De plus, pour que l'inéquation soit possible, il faut que $x + 1 \geq 0$ donc $x \in [-1; 3]$.

On élève chacun des membres de I_{12} au carré, on peut garder l'équivalence car chacun des membres de l'inégalité est positif sur $[-1; 3]$ et que la fonction carrée est strictement croissante sur \mathbb{R}^+ .

Soit $x \in [-1; 3]$, x est solution de I_{12} ssi $(x + 1)^2 \geq 3 - x$, soit $x^2 + 3x - 2 \geq 0$.

Les racines du polynôme $x^2 + 3x - 2$ sont $\begin{cases} x_1 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2} \\ x_2 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$ Or un polynôme du 2nd degré est du coefficient de x^2 à l'extérieur des racines et $x \in [-1; 3]$ donc $\mathcal{S} = \left[\frac{-3+\sqrt{17}}{2}; 3 \right]$

$I_{13} : e^{2x} + 3e^x - 4 \geq 0$ On pose $X = e^x$ et on résout alors $X^2 + 3X - 4 \geq 0$, soit $(X - 1)(X + 4) \geq 0$

Or un polynôme du 2nd degré est du coefficient de x^2 à l'extérieur des racines donc $e^x \leq -4$ ou $e^x \geq 1$

$e^x \leq -4$ est impossible et $e^x \geq 1$ ssi $x \geq 0$ donc $\mathcal{S} = \mathbb{R}^+$

Exercice 3 : Etude de fonctions

1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2$, f est définie sur \mathbb{R}
 $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \end{array} \right\}$ car la limite en l'infini d'un polynôme correspond à celle du monôme de plus haut degré.

• f est dérivable sur \mathbb{R} comme fonction polynôme. $f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x - 4)$

Un polynôme du second degré est du signe du coefficient de x^2 à l'extérieur des racines donc :

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$	
Signe de $f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
Variations de f	$-\infty$	\nearrow	\searrow	\nearrow	$+\infty$

2) $f(x) = (2 - x)\sqrt{x}$, f est définie sur \mathbb{R}^+

$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \end{array} \right\}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

• f est dérivable sur \mathbb{R}^{++} comme produit de fonctions dérivables.

$f = u \times v$ avec $u(x) = 2 - x$, $u'(x) = -1$, $v(x) = \sqrt{x}$, $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f' = u' \times v + u \times v'$ donc $f'(x) = -\sqrt{x} + \frac{2-x}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x} \left(1 - \frac{3}{2}x\right)$ $f'(x)$ est du signe de $1 - \frac{3}{2}x$

Tableau de variation de f :

x	0	$\frac{2}{3}$	$+\infty$		
Signe de $f'(x)$	\parallel	$+$	0	$-$	
Variations de f	0	\nearrow	$f\left(\frac{2}{3}\right)$	\searrow	$+\infty$

• Equation de la tangente au point d'abscisse 1 :

$T_a : y = f'(a)(x - a) + f(a)$

or $f'(1) = -\frac{1}{2}$ et $f(1) = 1$

Donc $T_1 : y = -\frac{1}{2}(x - 1) + 1 = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$

3) $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$, f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$

$f(x) = \frac{2x-1}{x-3} = \frac{2-\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$

$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$

• f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ comme fonction rationnelle.

$f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x - 1$, $u'(x) = 2$, $v(x) = x - 3$, $v'(x) = 1$

$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ donc $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $f'(x) = \frac{2(x-3) - (2x-1)}{(x-3)^2} = \frac{-5}{(x-3)^2} < 0$

Donc f est strictement décroissante sur $] -\infty; 3[$ et sur $] 3; +\infty[$

4) $f(x) = \frac{x^2-3x}{x+1}$, f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$f(x) = \frac{2x-3}{1+\frac{1}{x}}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$

• f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ comme fonction rationnelle.

$$f = \frac{u}{v} \text{ avec } u(x) = x^2 - 3x, \quad u'(x) = 2x - 3, \quad v(x) = x + 1, \quad v'(x) = 1$$

$$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \text{ donc } f'(x) = \frac{(2x-3)(x+1) - (x^2-3x)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$$

Donc $f'(x)$ est du signe de $x^2 + 2x - 3$, donc du signe du coefficient de x^2 à l'extérieur des racines.

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$			
Signe de $f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$		
Variations de f	$-\infty$	\nearrow	-9	\searrow	$-\infty$	$+\infty$		
				$+\infty$	\searrow	-1	\nearrow	$+\infty$

• Montrons que $\Omega(-1; -5)$ est un centre de symétrie. Pour ce faire, montrons que Ω est le milieu de $[MM']$, M ayant pour abscisse $-1 + h$ et M' ayant pour abscisse $-1 - h$ avec $h \in \mathbb{R}^*$.

$-1 + h \in \mathcal{D}_f$ et $-1 - h \in \mathcal{D}_f$. Calculons $f(-1 + h)$ et $f(-1 - h)$

$$\left. \begin{aligned} f(-1 + h) &= \frac{h^2 - 2h + 1 + 3 - 3h}{h} = h - 5 + \frac{4}{h} \\ f(-1 - h) &= \frac{h^2 + 2h + 1 + 3 + 3h}{-h} = -h - 5 - \frac{4}{h} \end{aligned} \right\} \text{ donc } \frac{f(-1 + h) + f(-1 - h)}{2} = -5$$

Donc $x_\Omega = \frac{x_M + x_{M'}}{2}$ et $y_\Omega = \frac{y_M + y_{M'}}{2}$. Donc $\Omega(-1; -5)$ est bien centre de symétrie de \mathcal{C}_f

• $f(x) = \frac{x^2 + x - 4x - 4 + 4}{x+1} = \frac{x(x+1) - 4(x+1) + 4}{x+1}$ donc $f(x) = x - 4 + \frac{4}{x+1}$ (autre méthode : identification).

• On a $f(x) - (x - 4) = \frac{4}{x+1}$ donc $\forall x \in]-\infty; -1[, f(x) - (x - 4) < 0$ et $\forall x \in]-1; +\infty[, f(x) - (x - 4) > 0$

Donc \mathcal{C} est en-dessous de Δ sur $] - \infty; -1[$ et \mathcal{C} est au-dessus de Δ sur $] - 1; +\infty[$.

5) $f(x) = 3e^{2-x} + e$, f est définie et dérivable sur \mathbb{R} . $f'(x) = -3e^{2-x} < 0$ sur \mathbb{R} donc f est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

6) $f(x) = \cos x \times (1 + \cos x)$, f est définie sur \mathbb{R} . $f(x + 2\pi) = f(x)$. f est 2π -périodique.

De plus, si $x \in \mathcal{D}_f$ alors, $-x \in \mathcal{D}_f$ et $f(-x) = f(x)$ donc f est paire. On limitera notre étude à $[0, \pi]$

f est dérivable sur \mathbb{R} sur comme produit de fonctions dérivables.

$$f'(x) = (-\sin x) \times (1 + \cos x) + \cos x \times (-\sin x) = -\sin x (1 + 2 \cos x)$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

Tableau de variation de f :

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	π		
$-\sin x$	0	$-$	$-$	0	
$1 + 2 \cos x$	$+$	0	$-$		
Signe de $f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
Variations de f	2	\searrow	$-1/4$	\nearrow	0

Exercice 4 :

$$f(x) = ax + b - \frac{c}{x+2}$$

1) f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

$$f'(x) = a + \frac{c}{(x+2)^2}$$

2) $A(1; 2) \in \mathcal{C}_f$ donc $f(1) = a + b - \frac{c}{3} = 2$

$T_{-1}: y = -x - 1$ donc $f'(-1) = -1$ soit $a + c = -1$ et $f(-1) = 0$ soit $-a + b - c = 0$

$$\text{On résout donc le système : } \begin{cases} a + b - \frac{c}{3} = 2 \\ a + c = -1 \\ -a + b - c = 0 \end{cases} \quad (S)$$

$$(a, b, c) \text{ est solution de } (S) \text{ ssi } \begin{cases} a + b - \frac{c}{3} = 2 \\ a + c = -1 \\ b = -1 \end{cases} \quad (l_2 + l_3 \rightarrow l_3) \quad \text{ssi } \begin{cases} a - \frac{c}{3} = 3 \\ a = -1 - c \\ b = -1 \end{cases} \quad \text{ssi } \begin{cases} -\frac{4c}{3} = 4 \\ a = -1 - c \\ b = -1 \end{cases} \quad \text{ssi } \begin{cases} c = -3 \\ a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$$

Donc $f(x) = 2x - 1 + \frac{3}{x+2}$

3) Deux droites sont parallèles quand elles ont même coefficient directeur. Or le coefficient de la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse x vaut $f'(x)$. On résout donc $f'(x) = 1$.

$$x \text{ est solution de l'équation } f'(x) = 1 \text{ ssi } 2 - \frac{3}{(x+2)^2} = 1 \text{ ssi } 3 = (x+2)^2 \text{ ssi } x^2 + 4x + 1 = 0 \text{ ssi } \begin{cases} x_1 = -2 - \sqrt{3} \\ x_2 = -2 + \sqrt{3} \end{cases}$$

La tangente à \mathcal{C} aux points d'abscisse x_1 et x_2 est parallèle à Δ .

Exercice 5 : Calcul de dérivées de fonctions composées

1) $f: x \mapsto 5x - 2 \mapsto \sqrt{5x - 2}$ donc $f(x) = h \circ i(x)$ avec $h(x) = \sqrt{x}$ et $i(x) = 5x - 2$
 h est dérivable sur \mathbb{R}^{+*} et $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

i est dérivable sur \mathbb{R} , $i(x) > 0$ pour $x > \frac{2}{5}$ et $i'(x) = 5$

Donc f est dérivable sur $]\frac{2}{5}; +\infty[$, $f' = i' \times h'(i)$

Donc $f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x-2}}$

2) $g: x \mapsto 2x - 3 \mapsto (2x - 3)^5$ donc $g(x) = j \circ k(x)$ avec $j(x) = x^5$ et $k(x) = 2x - 3$
 j est dérivable sur \mathbb{R} et $j'(x) = 5x^4$ k est dérivable sur \mathbb{R} et $k'(x) = 2$

Donc g est dérivable sur \mathbb{R} , $g' = k' \times j'(k)$ Donc $g'(x) = 10(2x - 3)^4$

3) $h: x \mapsto x^2 - 3x \mapsto e^{x^2 - 3x}$ donc $h(x) = l \circ m(x)$ avec $l(x) = e^x$ et $m(x) = x^2 - 3x$
 l est dérivable sur \mathbb{R} et $l'(x) = e^x$ m est dérivable sur \mathbb{R} et $m'(x) = 2x - 3$

Donc h est dérivable sur \mathbb{R} , $h' = m' \times l'(m)$ Donc $h'(x) = (2x - 3)e^{x^2 - 3x}$

Exercice 6 :

1) $\forall m \in \mathbb{R}, (-1; -2) \in \mathcal{D}_m$. En effet, $m(-1 + 1) - 2 = -2$.

Donc le point C de coordonnées $(-1; -2)$ est le point fixe recherché. De plus, $C \in \mathcal{H}$, car $\frac{2}{-1} = -2$

2) m représente le coefficient directeur de \mathcal{D}_m .

3) On résout l'équation $(E) : \frac{2}{x} = m(x + 1) - 2$ Valeur interdite : $x = 0$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, x est solution de (E) ssi $mx^2 + x(m - 2) - 2 = 0$ (E')

1^{er} cas : $m = 0$ (E') s'écrit $-2x - 2 = 0$ Soit $x = -1$ et $y = -2$

2^{ème} cas : $m \neq 0$ On calcule le discriminant : $\Delta = (m - 2)^2 + 8m = m^2 + 4m + 4 = (m + 2)^2$

$\Delta = 0$ pour $m = -2$, (E') s'écrit $-2x^2 - 4x - 2 = 0$ donc $x = -1$ donc $\mathcal{H} \cap \mathcal{D}_{-2} = \{C(-1; -2)\}$

$\Delta > 0 \forall m \in \mathbb{R} \setminus \{0; -2\}$, l'équation (E') admet deux solutions, il y a donc deux points d'intersection.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(m-2) - |m+2|}{2m} \\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(m-2) + |m+2|}{2m} \end{cases}$$

Si $m > -2$, $\begin{cases} x_1 = -1 & \text{donc } y_1 = 2 \\ x_2 = \frac{2}{m} & \text{donc } y_1 = m \end{cases}$ et si $m < -2$, $\begin{cases} x_1 = \frac{2}{m} & \text{donc } y_1 = m \\ x_2 = -1 & \text{donc } y_1 = 2 \end{cases}$

Conclusion :

$$\begin{cases} \text{Si } m = 0 & \mathcal{H} \cap \mathcal{D}_0 = \{C(-1; -2)\} \\ \text{Si } m = -2 & \mathcal{H} \cap \mathcal{D}_{-2} = \{C(-1; -2)\} \\ \forall m \in \mathbb{R} \setminus \{0; -2\} & \mathcal{H} \cap \mathcal{D}_m = \left\{ C(-1; -2); B\left(\frac{2}{m}; m\right) \right\} \end{cases}$$

Exercice 7 : Suites

1) $u_n = u_0 + nr$ donc $u_0 = u_{100} - 100r = 650 - 100 \times 8 = -150$

2) $S = 1 + 3 + 9 + 27 + \dots + 59049 = 3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{10}$

C'est la somme des termes d'une suite géométrique de raison 3 donc $S = \frac{u_0(1-q^{n+1})}{1-q} = \frac{1-3^{11}}{1-3} = 88573$

$S' = 1 + 4 + 7 + \dots + 1000$. C'est la somme des termes d'une suite arithmétique de raison 3. Donc $u_n = u_0 + nr$

Le nombre de termes est $n + 1 = \frac{u_n - u_0}{r} + 1$. Soit $n + 1 = \frac{1000-1}{3} + 1 = 334$

donc $S' = (n + 1) \times \frac{u_0 + u_n}{2} = 334 \times \frac{1001}{2} = 167167$

3) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n}{1+n}$

a. $u_0 = 0 \quad u_1 = \frac{1}{2} \quad u_2 = \frac{2}{3} \quad u_3 = \frac{3}{4}$

$u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc u n'est pas une suite arithmétique.

$\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_3}{u_2}$ donc u n'est pas une suite géométrique.

b. On calcule $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Donc la suite u est croissante.

4) Montrons par récurrence que (u_n) est majorée par 4. On note $\mathcal{P}(n): u_n \leq 4$

Initialisation : $u_0 = 0 \leq 4$ donc $\mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Je suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n \leq 4$.

Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq 4$.

$u_n \leq 4$ donc $3u_n + 4 \leq 3 \times 4 + 4$. Or, $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur \mathbb{R}^+ , donc $\sqrt{3u_n + 4} \leq \sqrt{16}$

D'où $u_{n+1} \leq 4$ ($\mathcal{P}(n+1)$ est vraie)

Conclusion : D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ est vraie c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 4$

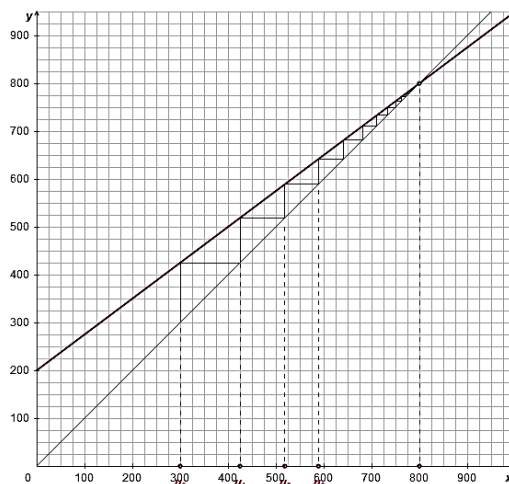
Exercice 8 : Suite arithmético-géométrique

1)- Pour obtenir la représentation des quatre premiers termes de la suite :

- Placer le terme initial $u_0 = 300$ sur l'axe des abscisses,
- Comme $u_1 = 0,75u_0 + 200$, u_1 est l'ordonnée de la droite d'équation $y = 0,75x + 200$ d'abscisse 300,
- A l'aide de la droite d'équation $y = x$, rabattre l'ordonnée u_1 sur l'axe des abscisses,
- Poursuivre ce procédé pour représenter u_2 et u_3 .

Graphiquement, la suite semble converger vers l'abscisse du point d'intersection des deux droites. Cette abscisse est solution de l'équation $x = 0,75x + 200$, c'est-à-dire $x = 800$.

La suite semble donc converger vers 800.



2)- a- $\forall n, v_{n+1} = u_{n+1} - 800 = 0,75.u_n + 200 - 800 = 0,75(v_n + 800) - 600 = 0,75v_n$
Donc la suite v est bien géométrique de raison 0,75 et de premier terme $v_0 = u_0 - 800 = -500$

b- $v_n = v_0 \cdot q^n = -500 \times 0,75^n$ donc $u_n = v_n + 800 = 800 - 500 \times 0,75^n$

c- $0 < 0,75 < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,75^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} -500 \times 0,75^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 800$

3)- a- On cherche n tel que $u_n \geq 790$. On écrit un algorithme sur la calculatrice permettant de trouver la première valeur de n vérifiant l'inégalité.

Initialisation

U prend la valeur 300

N prend la valeur 0

Traitement

Tant que $U < 790$

U prend la valeur $U * 0,75 + 200$

N prend la valeur $N + 1$

Fin Tant que

b- $u_n = 800 - 500 \times 0,75^n$ donc la suite u est majorée par 800. Le gérant ne pourra donc jamais espérer 1000 abonnés.

Sortie

Afficher N

On trouve : $n=14$.

Le nombre d'abonnés sera supérieur à 790 à partir de 2024.

Exercice 9 : Trigonométrie

1) a) Soit $t \in \mathbb{R}$, t est solution de $\cos(t) = \cos \frac{3\pi}{4}$ ssi $\begin{cases} t = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ t = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

donc $\mathcal{S} = \left\{ \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \text{avec } k \in \mathbb{Z} \right\}$

b) Soit $t \in \mathbb{R}$, t est solution de $\sin(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ssi $\sin(t) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ ssi $\begin{cases} t = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ t = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

donc $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \text{avec } k \in \mathbb{Z} \right\}$

c) Soit $t \in \mathbb{R}$, t est solution de $\cos(t) = -\cos \frac{\pi}{5}$ ssi $\cos(t) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \cos \frac{4\pi}{5}$

ssi $\begin{cases} t = \frac{4\pi}{5} + 2k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ t = -\frac{4\pi}{5} + 2k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

donc $\mathcal{S} = \left\{ \frac{4\pi}{5} + 2k\pi, -\frac{4\pi}{5} + 2k\pi, \text{avec } k \in \mathbb{Z} \right\}$

d) Soit $t \in \mathbb{R}$, t est solution de $\sin(2t) = \frac{1}{2}$ ssi $\sin(2t) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ ssi $\begin{cases} t = \frac{\pi}{12} + k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ t = \frac{5\pi}{12} + k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

donc $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{5\pi}{12} + k\pi, \text{avec } k \in \mathbb{Z} \right\}$

e) Soit $x \in \mathbb{R}$, x est solution de $\sin(2x) = -\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ ssi $\sin(2x) = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{5}\right)$

ssi $\begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{10} + 2k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 2x = \pi + \frac{\pi}{10} + 2k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$
ssi $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{20} + k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = \frac{11\pi}{20} + k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

donc $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{\pi}{20} + k\pi, \frac{11\pi}{20} + k\pi, \text{avec } k \in \mathbb{Z} \right\}$

2) $A(x) = \sin(\pi + x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(\pi - x) = -\sin x + \sin x - \sin x + \sin x = 0$
Donc $\mathcal{A}(x) = 0$

$B(x) = \cos(x + \pi) \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin^2(-x) = -\cos x \times \cos x - \sin^2 x = -1$ Donc $\mathcal{B}(x) = -1$

$C(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \sin \frac{\pi}{3} \times \cos x + \cos \frac{\pi}{3} \times \sin x - \sin \frac{\pi}{3} \times \cos x + \cos \frac{\pi}{3} \times \sin x = \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \sin x$
Donc $\mathcal{C}(x) = \sin x$

$D(x) = (\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = \cos^2 x + 2 \cos x \sin x + \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \cos x \sin x + \sin^2 x = 2$
Donc $\mathcal{D}(x) = 2$

3) Soit $x \in \mathbb{R}$, $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$
Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$

Exercice 10 : Probabilités conditionnelles

1. A et \bar{A} forment une partition de l'univers étudié donc $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$
Donc $P(A \cap B) = P(B) - P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B) = 0,39 - 0,9 \times 0,4 = 0,03$
2. $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,03}{0,1} = 0,3$

Exercice 11 : Géométrie analytique

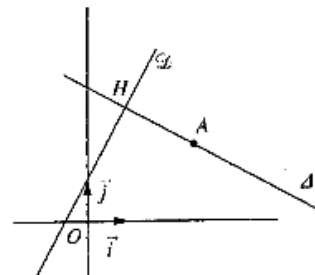
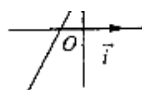
1° La droite \mathcal{D} contient les points $E(0; 1)$ et $F(1; 3)$.

2° $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de \mathcal{D} ,

donc $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à \mathcal{D} .

3° $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à Δ .

3° $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à Δ .



Soit un point $M(x; y)$.

$M \in \Delta$ si, et seulement si, $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$;

$M \in \Delta$ si, et seulement si, $1 \times (x-3) + 2 \times (y-2) = 0$;

$M \in \Delta$ si, et seulement si, $x + 2y - 7 = 0$;

$M \in \Delta$ si, et seulement si, $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$.

Une équation de Δ est $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$.

4° Le point d'intersection $H(x; y)$ des droites \mathcal{D} et Δ vérifie : $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \end{cases}$

ce système équivaut successivement à : $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ 2x + 1 = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \end{cases}$

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ \frac{5}{2}x = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

D'où $H(1; 3)$.

5° $\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, d'où : $AH = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

6° Le cercle \mathcal{C} de centre A , tangent à \mathcal{D} est le cercle dont un rayon est $[AH]$, puisque (AH) est orthogonale à \mathcal{D} .

Soit un point $M(x; y)$.

$M \in \mathcal{C}$ si, et seulement si, $AM = \sqrt{5}$;

$M \in \mathcal{C}$ si, et seulement si, $AM^2 = 5$;

$M \in \mathcal{C}$ si, et seulement si, $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$.

Une équation du cercle \mathcal{C} est $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$

(ou, sous forme développée : $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0$).

Exercice 12 : Géométrie analytique

Dans le repère proposé, les coordonnées des points sont :

$A(0, 0)$; $B(1, 0)$; $D(0, d)$; $E(e, 0)$; $F(0, 1)$. On a $e \neq 0$ et $d \neq 0$.

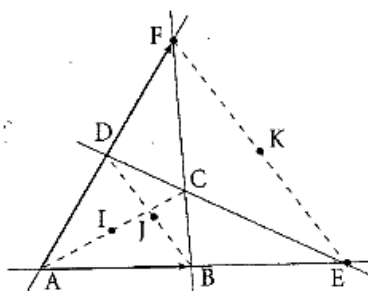
1. En utilisant le résultat de l'exercice 6, les équations demandées sont :

$$(BF) \quad x + y - 1 = 0;$$

$$(DE) \quad \frac{x}{e} + \frac{y}{d} - 1 = 0.$$

2. I est le milieu de [AC], il nous faut calculer les coordonnées de C :

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ \frac{x}{e} + \frac{y}{d} - 1 = 0 \end{cases}$$



- En multipliant la 1^{re} équation par $-\frac{1}{d}$ et en additionnant membre à membre :

$$x\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{d}\right) = 1 - \frac{1}{d}$$

$$x = \frac{(d-1)e}{d-e}$$

De même :

$$y = \frac{(e-1)d}{e-d}$$

Les coordonnées de C et I sont donc respectivement :

$$C \begin{pmatrix} \frac{(d-1)e}{d-e} \\ \frac{(e-1)d}{e-d} \end{pmatrix}; \quad I \begin{pmatrix} \frac{(d-1)e}{2(d-e)} \\ \frac{(e-1)d}{2(e-d)} \end{pmatrix}$$

Les coordonnées de J et K sont respectivement :

$$J \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{d}{2} \end{pmatrix}, \quad K \begin{pmatrix} \frac{e}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Rappel

J est le milieu de [BD], donc les coordonnées de J sont les demi-sommes des coordonnées des points B et D.

3. Montrer que \vec{JI} et \vec{JK} sont colinéaires :

$$\vec{JI} = \begin{pmatrix} \frac{(d-1)e}{2(d-e)} - \frac{1}{2} \\ \frac{(e-1)d}{2(e-d)} - \frac{d}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d(e-1)}{2(d-e)} \\ \frac{d(1-d)}{2(d-e)} \end{pmatrix}; \quad \vec{JK} = \begin{pmatrix} \frac{e-1}{2} \\ \frac{1-d}{2} \end{pmatrix}$$

$\frac{d(e-1)}{2(d-e)} \times \frac{1-d}{2} - \frac{d(1-d)}{2(d-e)} \times \frac{e-1}{2} = 0$, donc les vecteurs \vec{JI} et \vec{JK} sont colinéaires.

Les points I, J, K sont alignés.