

Correction du devoir de rentrée

I Calcul algébriqueExercice 1

Soient $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}^*$, simplifions les écritures A, B et C :

$$1. A = \frac{2^{n+1}}{2} = \frac{2 \times 2^n}{2} = 2^n$$

$$2. B = (-4)^{60} \times (-0,125)^{41} = -(2^{120} \times 2^{-123}) = -0,125$$

$$3. C = \frac{(a^2 b^3)^2}{(a^{-1} b)^3} = \frac{a^4 b^6}{a^{-3} b^3} = a^7 b^3$$

Exercice 2

Après avoir déterminé l'ensemble de définition, effectuons les calculs des expressions A, B, C et D où x représente une variable réelle

1. A est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$

$$A = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = \frac{x - (x+1)}{x(x+1)} = -\frac{1}{x(x+1)}$$

2. B est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{6\}$

$$B = \frac{x}{2x-12} - \frac{3}{x-6} = \frac{x-6}{2(x-6)} = \frac{1}{2}$$

3. C est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

$$C = \frac{\frac{5}{x+1}}{\frac{15}{x^2-1}} = \frac{5}{x+1} \times \frac{x^2-1}{15} = \frac{x-1}{3}$$

4. D est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$

$$D = \frac{\frac{3x}{x-1}}{x} = \frac{3x}{x-1} \times \frac{1}{x} = \frac{3}{x-1}$$

Exercice 3

1. Simplifions au maximum les expressions A et B :

$$1. A = (2\sqrt{3} - 3\sqrt{5})^2 = 4 \times 3 - 12\sqrt{15} + 9 \times 5 = 57 - 12\sqrt{15}$$

$$2. B = (7\sqrt{7} - 5\sqrt{5})(-7\sqrt{7} - 5\sqrt{5}) = -(7\sqrt{7} - 5\sqrt{5})(7\sqrt{7} + 5\sqrt{5}) = -(49 \times 7 - 25 \times 5)$$

$$\text{Donc } B = -218$$

2. Simplifions les expressions suivantes afin qu'il n'y ait plus de radical au dénominateur

$$1. A = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$2. B = \frac{1}{5-2\sqrt{2}} = \frac{5+2\sqrt{2}}{(5-2\sqrt{2})(5+2\sqrt{2})} = \frac{5+2\sqrt{2}}{25-8} = \frac{5+2\sqrt{2}}{17}$$

$$3. C = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}+1} = \frac{3\sqrt{5}(2\sqrt{5}-1)}{(2\sqrt{5}+1)(2\sqrt{5}-1)} = \frac{30-3\sqrt{5}}{19}$$

$$4. D = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{5\sqrt{3}+3\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(5\sqrt{3}-3\sqrt{2})}{(5\sqrt{3}+3\sqrt{2})(5\sqrt{3}-3\sqrt{2})} = \frac{5\sqrt{6}+15-6-3\sqrt{6}}{75-18} = \frac{9+2\sqrt{6}}{57}$$

Correction du devoir de rentrée

Exercice 4

1) Résolvons dans \mathbb{R} l'équation $(E_1) : 2x - 3(x + 1) = \frac{1-3x}{2}$

 (E_1) est définie sur \mathbb{R} .

Soit $x \in \mathbb{R}$, x est solution de (E_1) si, et seulement si, $2x - 3x - 3 - \frac{1-3x}{2} = 0$

si, et seulement si, $\frac{2(-x-3)}{2} - \frac{1-3x}{2} = 0$

si, et seulement si, $-2x - 6 - (1 - 3x) = 0$

si, et seulement si, $-2x - 6 - 1 + 3x = 0$

si, et seulement si, $x - 7 = 0$

c'est-à-dire, si, et seulement si, $x = 7$

Donc $\mathcal{S} = \{7\}$

2) Résolvons dans \mathbb{R} l'équation $(E_2) : \frac{x+3}{2} - \frac{4x-3}{3} = 1 - \frac{7x-12}{6}$

 (E_2) est définie sur \mathbb{R} .

Soit $x \in \mathbb{R}$, x est solution de (E_2) si, et seulement si, $x \left(\frac{3}{6} - \frac{8}{6} + \frac{7}{6} \right) = 1 + 2 - \frac{3}{2} - 1$,

c'est-à-dire $x = \frac{3}{2}$ donc $\mathcal{S} = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$

3) Résolvons dans \mathbb{R} l'équation $(E_3) : (2x + 3)(x + 5) - (2x - 7)(x - 1) = 0$

 (E_3) est définie sur \mathbb{R} .Soit $x \in \mathbb{R}$, x est solution de (E_3) si, et seulement si,

$$2x^2 + 10 + 3x + 15 - (2x^2 - 7x - 2x + 7) = 0$$

si, et seulement si, $22x = -8$, c'est-à-dire $x = -\frac{4}{11}$

donc $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{4}{11} \right\}$

4) Résolvons dans \mathbb{R} l'équation $(E_4) : \frac{2x-3}{4} + \frac{x-1}{6} = \frac{2x-5}{3}$

 (E_4) est définie sur \mathbb{R} .

Soit $x \in \mathbb{R}$, x est solution de (E_4) si, et seulement si, $x \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{2}{3} \right) = -\frac{5}{3} + \frac{3}{4} + \frac{1}{6}$,

c'est-à-dire $0 = -\frac{9}{12}$, impossible donc $\mathcal{S} = \emptyset$

Correction du devoir de rentrée

Exercice 5

1) Résolvons dans \mathbb{R} l'équation $(E_1) : \frac{3}{5x+1} = \frac{5}{2}$

 (E_1) est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{5}\right\}$ Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{5}\right\}$, x est solution de (E_1) si, et seulement si, $6 = 25x + 5$, c'est-à-dire $x = \frac{1}{25}$

donc $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{25}\right\}$

2) Résolvons dans \mathbb{R} l'équation $(E_2) : \frac{2x-7}{2x-3} - 1 = \frac{2}{x-1}$

 (E_2) est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}; 1\right\}$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}; 1\right\}$, x est solution de (E_2) ssi $\frac{(2x-7)(x-1) - (2x-3)(x-1) - 2(2x-3)}{(2x-3)(x-1)} = 0$

ssi $\frac{2x^2 - 9x + 7 - 2x^2 + 5x - 3 - 4x + 6}{(2x-3)(x-1)} = 0$

ssi $\frac{-8x+10}{(2x-3)(x-1)} = 0$

ssi $-8x + 10 = 0$, c'est-à-dire $x = \frac{5}{4}$

donc $\mathcal{S} = \left\{\frac{5}{4}\right\}$

3) Résolvons dans \mathbb{R} l'équation $(E_3) : \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} = 0$

 (E_3) est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; -2; -3\}$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; -2; -3\}$, x est solution de (E_3) si, et seulement si, $\frac{(x+3)+(x+1)}{(x+1)(x+2)(x+3)} = 0$

si, et seulement si $\frac{2x+4}{(x+1)(x+2)(x+3)} = 0$

si, et seulement si $2x + 4 = 0$

si, et seulement si $x = -2$

donc $\mathcal{S} = \emptyset$

Exercice 6

1) Résolvons dans \mathbb{R} l'inéquation $(I_1) : 2(3x - 1) < 7(x - 2)$

 (I_1) est définie sur \mathbb{R}

Soit $x \in \mathbb{R}$, x est solution de (I_1) si, et seulement si, $6x - 2 - 7x + 14 < 0$

si, et seulement si, $-x + 12 < 0$

si, et seulement si, $x > 12$

Donc $\mathcal{S} =]12; +\infty[$

2) Résolvons dans \mathbb{R} l'inéquation $(I_2) : 3x - 1 < x(x + 3)$

 (I_2) est définie sur \mathbb{R}

Soit $x \in \mathbb{R}$, x est solution de (I_2) si, et seulement si, $3x - 1 - x^2 - 3x < 0$

si, et seulement si, $-1 - x^2 < 0$

si, et seulement si, $x^2 > -1$

Or un carré est toujours positif donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 > -1$

Donc $\mathcal{S} = \mathbb{R}$

Correction du devoir de rentrée

3) Résolvons dans \mathbb{R} l'inéquation (I_3) : $(2-x)(3x+7) \geq 4-x^2$

(I_3) est définie sur \mathbb{R}

Soit $x \in \mathbb{R}$, x est solution de (I_3) si, et seulement si, $(2-x)(3x+7) - (2-x)(2+x) \geq 0$

si, et seulement si, $(2-x)(3x+7-2-x) \geq 0$

si, et seulement si, $(2-x)(2x+5) \geq 0$

Dressons le tableau de signe de $P(x) = (2-x)(2x+5)$

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	2	$+\infty$	
$2-x$	+	+	0	-	
$2x+5$	-	0	+	+	
$P(x)$	-	0	+	0	-

Donc $\mathcal{S} = \left[-\frac{5}{2}; 2\right]$

4) Résolvons dans \mathbb{R} l'inéquation (I_4) : $\frac{3}{1-3x} \geq \frac{2}{1-2x}$

(I_4) est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right\}$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right\}$, x est solution de (I_4) si, et seulement si, $\frac{3}{1-3x} - \frac{2}{1-2x} \geq 0$

si, et seulement si, $\frac{3(1-2x)-2(1-3x)}{(1-3x)(1-2x)} \geq 0$

si, et seulement si, $\frac{3-6x-2+6x}{(1-3x)(1-2x)} \geq 0$

si, et seulement si, $\frac{1}{(1-3x)(1-2x)} \geq 0$

Dressons le tableau de signe de $A(x) = \frac{1}{(1-3x)(1-2x)}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$1-3x$	+	0	-	-
$1-2x$	+	+	0	-
$A(x)$	+	-	-	+

Donc $\mathcal{S} =]-\infty; \frac{1}{3}[\cup]\frac{1}{2}; +\infty[$

5) Résolvons dans \mathbb{R} l'inéquation (I_5) : $\frac{2x+5}{1+2x} < \frac{1-2x}{5-2x}$

(I_5) est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right\}$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right\}$, x est solution de (I_5) si, et seulement si, $\frac{1-2x}{5-2x} - \frac{2x+5}{1+2x} > 0$

si, et seulement si, $\frac{(1-2x)(1+2x)-(2x+5)(5-2x)}{(5-2x)(1+2x)} > 0$

Correction du devoir de rentrée

si, et seulement si, $\frac{1-4x^2-25+4x^2}{(5-2x)(1+2x)} > 0$

si, et seulement si, $\frac{-24}{(5-2x)(1+2x)} > 0$

Dressons le tableau de signe de $B(x) = \frac{-24}{(5-2x)(1+2x)}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
-24	-	-	-	-
$5-2x$	+	0	-	-
$1+2x$	-	-	0	+
$B(x)$	+	-	-	+

Donc $\mathcal{S} =]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]\frac{5}{2}; +\infty[$

6) Résolvons dans \mathbb{R} l'inéquation (I_6) : $|2x-1| \leq |x+2|$

(I_6) est définie sur \mathbb{R}

On détermine les valeurs frontières de chaque valeur absolue : $2x-1=0$ soit $x=\frac{1}{2}$ et $x+2=0$ soit $x=-2$

On remplit un tableau de forme :

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
$ 2x-1 $	$-2x+1$	5	$-2x+1$	0	$2x-1$
$ x+2 $	$-x-2$	0	$x+2$	$\frac{5}{2}$	$x+2$
(E_2)	$-2x+1 \leq -x-2$ $x \geq 3$	$-2x+1 \leq x+2$ $x \geq -\frac{1}{3}$	$2x-1 \leq x+2$ $x \leq 3$		
(I_6)	impossible $\mathcal{S}_1 = \emptyset$	$\mathcal{S}_2 = \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$	$\mathcal{S}_3 = \left[\frac{1}{2}; 3\right]$		

D'où $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3 = \left[-\frac{1}{3}; 3\right]$

II Etudes de fonctions

Exercice 1

Soit f la fonction trinôme ou polynôme du 2nd degré définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -2x^2 + 4x + 11$.

Nous posons $a = -2, b = 4$ et $c = 11$.

1) Déterminons la forme canonique de la fonction f :

a. 1^{ère} méthode :

$$f(x) = -2x^2 + 4x + 11 = -2\left(x^2 - 2x - \frac{11}{2}\right) = -2\left[(x-1)^2 - 1 - \frac{11}{2}\right] = -2\left[(x-1)^2 - \frac{13}{2}\right]$$

Ainsi $f(x) = -2(x-1)^2 + 13$

b. 2^{ème} méthode : $f(x) = -2x^2 + 4x + 11$. On a $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{-4} = 1$ et $\beta = f(\alpha) = 13$.

On sait que $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$

Ainsi $f(x) = -2(x-1)^2 + 13$

Correction du devoir de rentrée

Nous pouvons déterminer la forme factorisée de f

puisque $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $A^2 - B^2$.

$$f(x) = 13 - 2(x-1)^2 \quad \text{Donc } \boxed{f(x) = (\sqrt{13} - \sqrt{2}(x-1))(\sqrt{13} + \sqrt{2}(x-1))}$$

2) Déterminons les variations de f :

Nous savons que $a = -2$ donc $a < 0$ d'où \mathcal{C}_f , la courbe représentative de f , admet un maximum en S de coordonnées α et β . $S(1; 13)$.

D'après le cours, une fonction trinôme pour laquelle $a < 0$ admet comme tableau de variation :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Variations de f	$-\infty$	13	$-\infty$

Sur $] -\infty; 1]$ f est croissante et sur $[1; +\infty[$ f est décroissante.

3) Déterminons un encadrement de $f(x)$ pour $x \in [1; 3]$

D'après la question 2), nous savons que sur $[1; 3]$ f est décroissante, c'est-à-dire :

$$\forall x_1 \in [1; 3] \text{ et } \forall x_2 \in [1; 3] : \text{ Si } x_1 \leq x_2 \text{ alors } f(x_1) \geq f(x_2)$$

D'où, pour tout $x \in [1; 3]$, si $1 \leq x$ alors $f(1) \geq f(x)$ et si $x \leq 3$ alors $f(x) \geq f(3)$

Ainsi, pour tout $x \in [1; 3]$, $f(x) \in [f(3); f(1)]$

$$\text{Or } f(1) = 13 \text{ et } f(3) = 5$$

$$\text{D'où } \boxed{\text{si } x \in [1; 3] \text{ alors } f(x) \in [5; 13]}$$

4) La réciproque de cette affirmation est : si $f(x) \in [5; 13]$ alors $x \in [1; 3]$.

Or $f(0) = 11$ et $11 \in [5; 13]$ mais $0 \notin [1; 3]$ Donc la réciproque est fausse.

Exercice 2

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x-5}{x-3}$

1) f est définie sur l'ensemble des valeurs réelles telles que $x - 3 \neq 0$ donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{3\}$

2) Démontrons que $\forall x \in \mathcal{D}_f \quad f(x) = 2 + \frac{1}{x-3}$

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \in \mathcal{D}_f, \quad 2 + \frac{1}{x-3} &= \frac{2(x-3)}{x-3} + \frac{1}{x-3} \\ &= \frac{2x - 6 + 1}{x-3} \\ &= \frac{2x - 5}{x-3} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \boxed{\forall x \in \mathcal{D}_f \quad f(x) = 2 + \frac{1}{x-3}}$$

3. Montrons que f est décroissante sur $] -\infty; 3[$.

Soit $x_1 \in] -\infty; 3[$ Soit $x_2 \in] -\infty; 3[$ tels que $x_1 < x_2$. On a $f(x_1) = 2 + \frac{1}{x_1-3}$ et $f(x_2) = 2 + \frac{1}{x_2-3}$

On a $x_1 < x_2 < 3$

D'où $x_1 - 3 < x_2 - 3 < 0$

D'où $\frac{1}{x_1-3} > \frac{1}{x_2-3} \quad (< 0) \quad (\text{par stricte décroissance de la fonction inverse sur } \mathbb{R}^*_-)$

Correction du devoir de rentrée

$$\text{D'où } \frac{1}{x_1-3} + 2 > \frac{1}{x_2-3} + 2$$

$$\text{C'est-à-dire } f(x_1) > f(x_2)$$

Ainsi, pour $x_1 \in]-\infty; 3[$ et $x_2 \in]-\infty; 3[$, si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) > f(x_2)$
La fonction f est donc strictement décroissante sur $]-\infty; 3[$

La fonction f est une fonction homographique, elle a le même sens de variation sur l'intervalle $]-\infty; 3[$ et sur l'intervalle $]3; +\infty[$

Donc la fonction f est également strictement décroissante sur $]3; +\infty[$.

III Droites, systèmes et vecteurs**Exercice 1**

1) Résolvons le système (S): $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 4x - 2y = -10 \end{cases}$ où x et y sont des réels

$$(x; y) \text{ solution de (S) si, et seulement si } \begin{cases} -4x - 6y = -14 \\ 4x - 2y = -10 \end{cases} \quad (L_1 \leftarrow -2L_1)$$

$$\text{si, et seulement si, } \begin{cases} -8y = -24 \\ 4x - 2y = -10 \end{cases} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + L_2)$$

$$\text{si, et seulement si, } \begin{cases} y = 3 \\ 4x = -10 + 2y \end{cases}$$

$$\text{si, et seulement si, } \begin{cases} y = 3 \\ x = \frac{1}{4}(-10 + 6) = -1 \end{cases} \text{ donc } \boxed{\mathcal{S} = \{(-1; 3)\}}$$

2) Déduisons-en les solutions du système (S'): $\begin{cases} \frac{2}{x-1} + 3y = 7 \\ \frac{4}{x-1} - 2y = -10 \end{cases}$. (S') est défini si $x \neq 1$ et $y \in \mathbb{R}$.

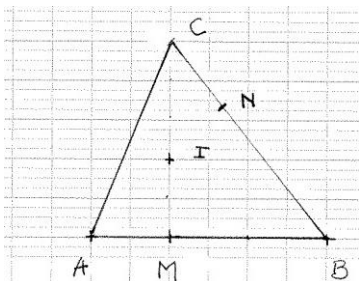
On pose $X = \frac{1}{x-1}$. D'après la question précédente, on trouve $\frac{1}{x-1} = -1$ donc $x = 0$. D'où $\boxed{\mathcal{S} = \{(0; 3)\}}$

Exercice 2

Soit ABC un triangle non aplati. On considère les points M, N et I définis par :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{CI} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CM} \text{ et } \overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$$

1)



2) Exprimons \overrightarrow{AI} en fonction de \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} :

$$\text{On sait que } \overrightarrow{CI} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CM} \text{ d'où } \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AI} = \frac{3}{5}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}) \text{ donc } \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AC} - \frac{3}{5}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$\text{Donc } \boxed{\overrightarrow{AI} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}}$$

3) Exprimons \overrightarrow{AN} en fonction de \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} :

$$\text{On sait que } \overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \text{ d'où } \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \text{ donc } \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\text{Donc } \boxed{\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}}$$

4) Déduisons-en que les points A, I, N sont alignés.

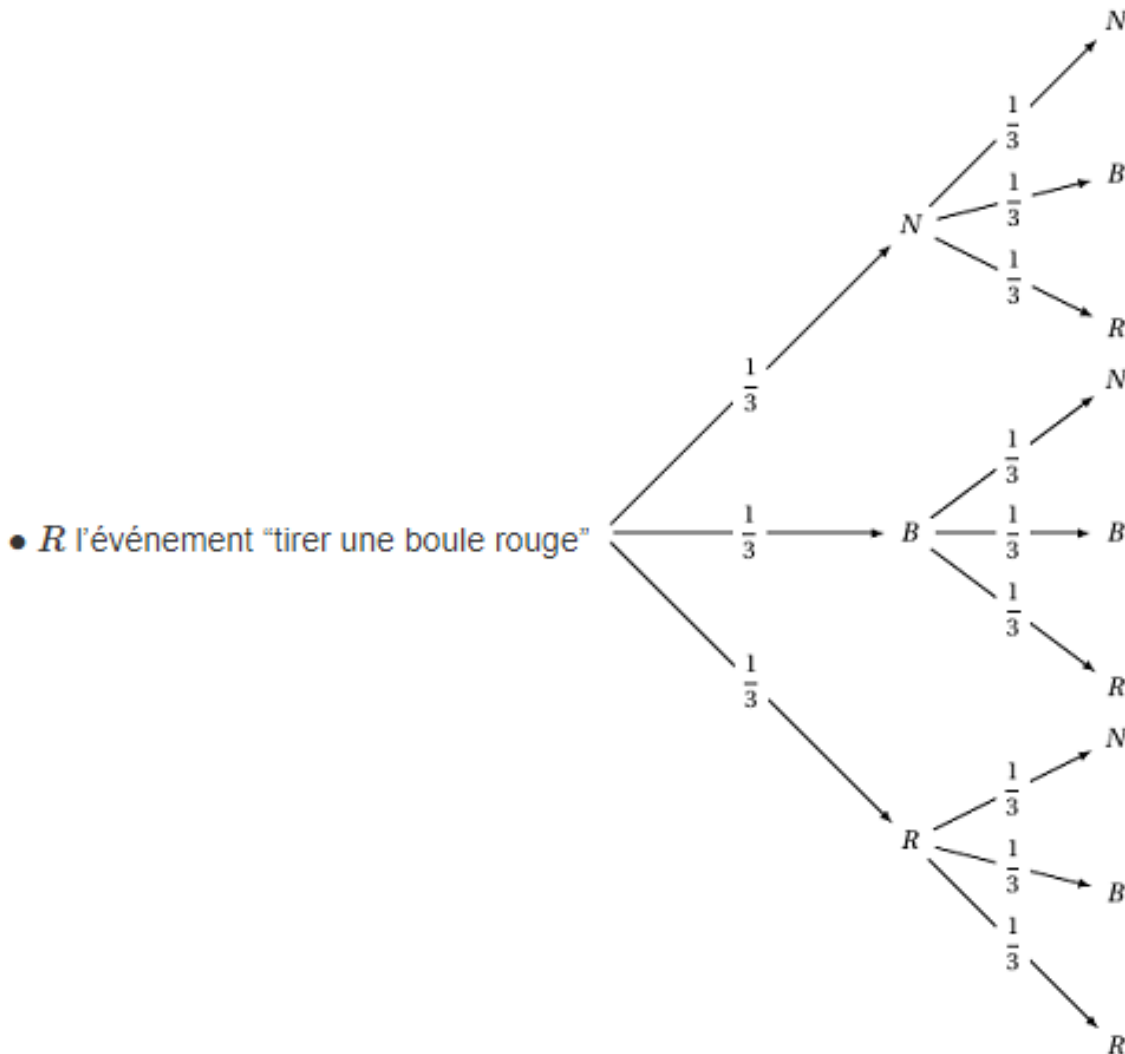
De ce qui précède, on remarque $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AN}$ donc par définition, $\boxed{\text{les points } A, I, N \text{ sont alignés.}}$

Correction du devoir de rentrée

V ProbabilitésExercice 1

1. On appelle :

- N l'événement "tirer une boule noire"
- B l'événement "tirer une boule blanche"



2. Il y a quatre tirages sans boules blanches.

Ainsi la probabilité cherchée est de $\frac{4}{9}$.

3. Il y a cinq tirages qui contiennent au moins une boule blanche.

Ainsi la probabilité cherchée est de $\frac{5}{9}$.

4. Trois tirages ne contiennent que des boules de même couleur.

La probabilité cherchée est de $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

Exercice 2

1.

	Femmes	Hommes	Total
Moins de 25 ans	75	54	129
Entre 25 et 40 ans	171	170	341
Entre 40 et 60 ans	310	270	580
Plus de 60 ans	284	166	450
Total	840	660	1 500

$$2. p(A) = \frac{75}{1\,500} = \frac{1}{20}$$

$$p(B) = \frac{166}{1\,500} = \frac{83}{750}$$

$$p(C) = \frac{341}{1\,500}$$

$$p(D) = \frac{171 + 310}{1\,500} = \frac{481}{1\,500}$$

$$p(E) = \frac{54 + 170 + 270}{1\,500} = \frac{247}{750}$$

$$p(F) = \frac{840}{1\,500} = \frac{14}{25}$$

3. La probabilité cherchée est de $\frac{284}{840} = \frac{71}{210}$

4. La probabilité cherchée est de $\frac{270 + 166}{580 + 450} = \frac{218}{515}$